**<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ</u>**

## ΘΕΜΑ 1$^ο$

**Α.** 5$^{ος}$ κανόνας λογισμού πιθανοτήτων (Σχ. Βιβλ. σελ 152)
**Β. α)** Ορισμός (Σχ. Βιβλ. σελ 13)
**β)** Ορισμός (Σχ. Βιβλ. σελ 87)
**Γ. i)** Σωστό **ii)** Λάθος **iii)** Σωστό **iv)** Λάθος **v)** Λάθος

## ΘΕΜΑ 2

**Α.** $f(1) = 1$ άρα $(1, 1) \in C_f$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο της Λ(1, 1) είναι

$$y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1), \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$y - 1 = -(x-1)$$

$$y = -x + 2$$

**Β.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ άρα $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \notin C_f$

Έστω $(x_0, f_{(x_0)})$ το σημείο επαφής της $C_f$ με την ε΄

$$ε' : y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

$$ε' : y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$$

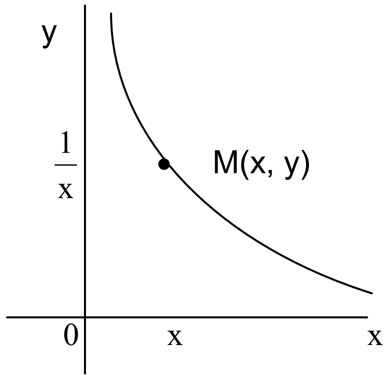
$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \in ε' : -\frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}\left(\frac{1}{2} - x_0\right) \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} - x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4}$$

Άρα $ε' : y - f\left(\frac{1}{4}\right) = f'\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(x - \frac{1}{4}\right)$

$$y - 4 = -16\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$y = -16x + 8$$

**Γ.**



$$M(x, y) = \left(x, \frac{1}{x}\right) \qquad , x > 0$$

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι

$$\Pi(x) = 2 \cdot x + 2 \cdot \frac{1}{x}, \qquad , x > 0$$

$$\Pi'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^2 - 2}{x^2}$$

| $x$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2-2$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2$ | | | $+$ | | $+$ | |
| $\Pi'(x)$ | | | $-$ | | $+$ | |
| $\Pi(x)$ | | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Η περίμετρος του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη για x = 1

Τότε οι συντεταγμένες του σημείου Μ είναι (Ζ, f(1)=(1, 1)

**Δ.** $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2[f(x)\cdot e^x + e\cdot f'(x)]}{x^2e^2 + xe^x - xe^{x+1} - e} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2\left[\frac{e^x}{x} - \frac{e}{x^2}\right]}{xe^x(xe^x+1) - e(xe^x+1)} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{xe^x - e}}{(xe^x+1)\cdot \cancel{(xe^x - e)}} = \frac{1}{e+1}$$

## ΘΕΜΑ 3

i)

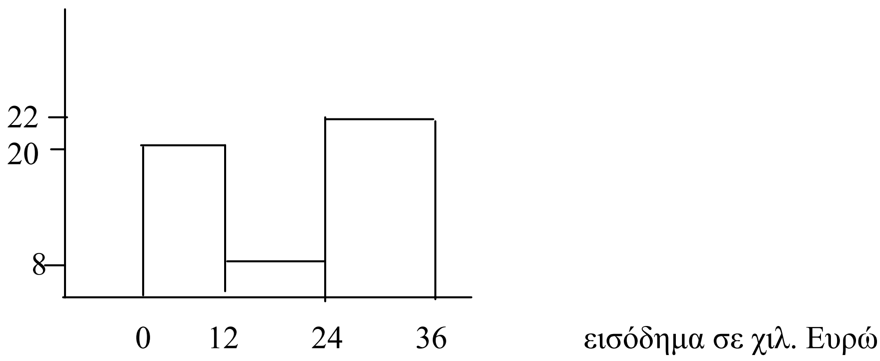
| Εισόδημα / Φύλο | 0 -1 2 | 12 - 24 | 24 - 36 | Σύνολο |
|---|---|---|---|---|
| Άνδρας | 8 | 2 | 10 | 20 |
| Γυναίκα | 12 | 6 | 12 | 30 |
| Σύνολο | 20 | 8 | 22 | 50 |

- $P(A) = 0{,}4 \Leftrightarrow \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = 0{,}4 \Leftrightarrow \dfrac{N(A)}{50} = 0{,}4 \Leftrightarrow N(A) = 20$
- Άρα το πλήθος των γυναικών θα είναι 30
- Οι άνδρες στην κλάση 1-24 θα είναι 20-10-8=2
- Β: «ενδεχόμενο μια γυναίκα απ’ το δείγμα να έχει εισόδημα από 0 εως 12 χιλ. Ευρώ»

  Δ: «ενδεχόμενο μια γυναίκα απ’ το δείγμα να έχει εισόδημα από 12 εως 24 χιλ Ευρώ.

  Ισχύει $P(B) = 2P(\Delta) \Leftrightarrow N(B) = 2N(\Delta) = 2 \cdot 6 = 12$

ii)




iii) Τα κέντρα των κλάσεων είναι 6, 18, 30 άρα

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 20 + 18 \cdot 8 + 30 \cdot 22}{50} = 18{,}48$$

iv) Είναι γνωστό ότι από 24 εως 36 χιλ Ευρώ το ποσοστό των ατόμων είναι :

$\frac{22}{50} \cdot 100 = 44\%$.

Μένει να βρούμε το ποσοστό των ατόμων με εισόδημα από 21 εως 24 χιλ. Ευρώ

$$\frac{c'}{c} = \frac{f_2'\%}{f_2\%} \Leftrightarrow \frac{24-21}{24-12} = \frac{f_2'\%}{16} \Leftrightarrow f_2'\% = 4$$

Άρα το ποσοστό των ατόμων που έχουν εισόδημα πάνω από 21000 Ευρώ είναι $44 + 4 = 48\%$.

**<u>ΘΕΜΑ 4</u>**

**Α.** Το εύρος των τιμών μιας μεταβλητής είναι η διαφορά της μικρότερης από την μεγαλύτερη τιμή. Οπότε R = 38-20 = 18 έτη.
Όμως η κατανομή των ηλικιών είναι κανονική και στην κανονική κατανομή το εύρος R ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή R $\cong$ 6s οπότε 6s =18 $\leftrightarrow$ S = 3 έτη.

Ο συντελεστής μεταβολής CV των ηλικιών δίνεται από τον τύπο $CV = \frac{s}{\bar{x}}$

επομένως $CV = \frac{3}{29} \cong 10{,}34\%$.

**Β.** Το βάρος των ατόμων <u>δεν ακολουθεί κανονική κατανομή</u>, διότι: αν η κατανομή των βαρών ήταν κανονική, με μέση τιμή 70 κιλά, τότε το 50% των ατόμων θα είχε βάρος πάνω από 70 κιλά και όχι μόνο το 35%. Έτσι έχουμε <u>θετική ασυμμετρία</u> και όχι <u>κανονική κατανομή</u>.

**Γ.** Στην κανονική κατανομή των ηλικιών, οι τιμές 23 και 29 (με $\bar{x} = 29$ και $s = 3$) αντιστοιχούν στις τιμές $\bar{x}$ και $\bar{x} - 2s$ αντίστοιχα. Όμως στο διάστημα ( $\bar{x} - 2s, \bar{x}$) βρίσκεται το $\frac{95}{2} = 47{,}5\%$.

Αφού το ποσοστό των ατόμων, πάνω από 70 κιλά είναι 35%, το ποσοστό των ατόμων με βάρος κάτω των 70 κιλών είναι 65%, οπότε P(B)=65%.

**i)** Αν τα ενδεχόμενα A και B ήταβ ασυμβίβαστα, θα ίσχυε ο απλός προσθετικός νόμος, δηλ. $P(A\cup B)= P(A) + P(B) = 0,475 + 0,650 =1,125$ άτοπο (διότι πρέπει $P(A\cup B)\leq 1$.
<u>Άρα τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα .</u>

**ii)** Το ενδεχόμενο : «το άτομο είναι μεταξύ 23 και 29 ετών κα ταυτόχρονα κάτω των 70 κιλών» είναι το $A\cap B$, οπότε $P(A\cap B)=23,5\%$.
Το ενδεχόμενο : «το άτομο είναι μεταξύ 23 και 29 ετών και άνω των 70 κιλών» είναι το $A\cap B'$.
Επομένως η $P(A\cap B') = P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) = 47,5 - 23,5 = 24\%$

**Δ.** Ο τύπος $S^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right\}$ (1) ισοδύναμα γίνεται

$$(1) = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2}{\nu} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu^2} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2}{\nu} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu}\right)^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \bar{x}^2$$

Όμως, από δεδομένα : S=3, $\bar{x} = 29$ και $\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 = 34000$

Οπότε από τον τελευταίο τύπο, έχω :

$$3^2 = \frac{1}{\nu}34000 - 29^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}34000 = 9 + 841 \Leftrightarrow 850\nu = 34000 \Leftrightarrow \nu = 40$$

<u>Άρα το μέγεθος του δείγματος είναι ν = 40 άτομα.</u>