ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤ

## ΘΕΜΑ Β

Β. 1. $f'(x) = -\left(\frac{1}{x+1}\right)' f(x)$

$f'(x) + \left(\frac{1}{x+1}\right)' f(x) = 0$

$e^{\frac{1}{x+1}} \cdot f'(x) + e^{\frac{1}{x+1}} \left(\frac{1}{x+1}\right)' f(x) = 0$

$\left(e^{\frac{1}{x+1}} f(x)\right)' = 0 \Rightarrow$

$e^{\frac{1}{x+1}} f(x) = c \overset{x=0}{\Longrightarrow} \; c = e$

$f(x) = e^{-\frac{1}{x+1}} \cdot e$

$f(x) = e^{1-\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{x}{x+1}}$

Β. 2.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = e$$

Β. 3.

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{x}{x+1}} > 0 \Rightarrow f \uparrow \sigma\tau o \; (-1, +\infty)$$

Άρα $f(A) = (0, e) \; o\pi \acute{o} \tau \varepsilon \; 0 < f(x) < e$

Β. 4.

$$\lim_{x\to +\infty} [g(x) - (x - e + 1)] = 0$$

Β. 5. ……

Β. 6.

| x | -1 | | $-\frac{1}{2}$ | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| g΄΄ | | - | | + | |
| g΄ | | 1 $\searrow$ | | $\nearrow$ 1 | |
| | | | $1-\frac{4}{e}$ | | |

2 ακριβώς ρίζες

Β. 7. $I = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1}\right)' dx = -\left[\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ. 1. $x^2 \cdot (x+2)f'(x) = x - (x+2)\ln(x+2) \Longrightarrow$

$x^2 f'(x) = \frac{x}{x+2} - \ln(x+2) \Longrightarrow$

$f'(x) = \frac{[\ln(x+2]' \cdot x - (x)' \ln(x+2)}{x^2} \Longrightarrow$

$f'(x) = \left(\frac{\ln(x+2)}{x}\right)'$

Για $x \in (-2,0)$

$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x} + C_1$

$x = -1 \quad\quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \quad C_1 = 0$

Άρα , $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x} \quad\quad x \in (-2,0)$

Για $x \in (0, +\infty)$

$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x} + C_2$

$x = 2 \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ C_2 = 0$

Άρα, $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x}$

$x \in (0, +\infty)$

Τελικά , $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x}, \quad x \in (-2,0) \cup (0 + \infty)$

Γ. 2. $f'(x) \frac{x-(x+2)\ln(x+2)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

Θεωρούμε $g(x) = x - (x+2)\ln(x+2)$

Οπότε για $x = -1$ η g παρουσιάζει μέγιστο άρα, $g(x) \leq g(-1) \Longrightarrow g(x) < 0$

Οπότε και $f'(x) < 0$

Άρα $f$ γνησίως φθίνουσα στα $(-2,0)$, $(0, +\infty)$ $\kappa\alpha\iota$ $f$ δεν έχει ακρότατα.

Γ. 3. $\Delta_1 = (-2,0)$

$f$ γνησίως φθίνουσα και συνεχής

$\Delta_2 = (0, +\infty)$

$f$ γνησίως φθίνουσα και συνεχής

$f(\varDelta_1) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f(\varDelta_2) = (0, +\infty)$

$f(\varDelta) = f(\varDelta_1) \cup f(\varDelta_2) = \mathbb{R}$

Γ. 4. $f(x) = 2016$

Επειδή $2016 \in f(\varDelta_1)$ $\kappa\alpha\iota$ $f$ γνησίως φθίνουσα

Άρα 1 ακριβώς αρνητική ρίζα

Επειδή 2016 $\in f(\varDelta_2)$ $\kappa\alpha\iota\ f$ γνησίως φθίνουσα

Άρα 1 ακριβώς θετική ρίζα

Δηλαδή 2 ακριβώς ετερόσημες ρίζες

Γ. 5. Θεωρούμε $\quad h(x) = f(x) + (x - x_2) \cdot g(x) \cdot e^{-x} - 2016$

$h(x_2) = 0$

Άρα $h(x) \geq h(x_2)$

Οπότε τοπικό ελάχιστο $x_2$, από Fermat $h'(x_2) = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow g'(x_2) > 0$

Γ. 6. Θ.Μ.Τ. για $f(t) = lnt\ \ \sigma\tau o\ [2, x+2]$

$f'$ γνησίως φθίνουσα και ισχύει $2 < \xi < x$

$\Leftrightarrow f'(2) > f'(\xi) > f'(x)$

Γ. 7. $(2 + 2016)^{2015} < (2 + 2015)^{2016} \Leftrightarrow$

$f(2016) < f(2015 \Leftrightarrow$

$2016 > 2015$

Γνησίως φθίνουσα ισχύει.