

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤ

ΘΕΜΑ Β

B. 1.  $f'(x) = -\left(\frac{1}{x+1}\right)' f(x)$   
 $f'(x) + \left(\frac{1}{x+1}\right)' f(x) = 0$   
 $e^{\frac{1}{x+1}} \cdot f'(x) + e^{\frac{1}{x+1}} \left(\frac{1}{x+1}\right)' f(x) = 0$   
 $\left(e^{\frac{1}{x+1}} f(x)\right)' = 0 \Rightarrow$   
 $e^{\frac{1}{x+1}} f(x) = c \stackrel{x=0}{\Rightarrow} c = e$   
 $f(x) = e^{-\frac{1}{x+1}} \cdot e$   
 $f(x) = e^{1-\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{x}{x+1}}$

B. 2.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$$

B. 3.

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{x}{x+1}} > 0 \Rightarrow f \uparrow \text{ στο } (-1, +\infty)$$

Άρα  $f(A) = (0, e)$  οπότε  $0 < f(x) < e$

B. 4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x - e + 1)] = 0$$

B. 5. ....

B. 6.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
g''		-	+
g'		1	1
		$1 - \frac{4}{e}$	

2 ακριβώς ρίζες

$$B. 7. \quad I = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1}\right)' dx = -\left[\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

### ΘΕΜΑ Γ

$$Γ. 1. \quad x^2 \cdot (x+2)f'(x) = x - (x+2)\ln(x+2) \Rightarrow$$

$$x^2 f'(x) = \frac{x}{x+2} - \ln(x+2) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{[\ln(x+2)]' \cdot x - (x)' \ln(x+2)}{x^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(x+2)}{x}\right)'$$

Για  $x \in (-2, 0)$

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x} + C_1$$

$$x = -1 \quad \text{τότε} \quad C_1 = 0$$

$$\text{Άρα, } f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x} \quad x \in (-2, 0)$$

Για  $x \in (0, +\infty)$

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x} + C_2$$

$$x = 2 \quad \text{τότε} \quad C_2 = 0$$

$$\text{Άρα, } f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x}$$

$x \in (0, +\infty)$

$$\text{Τελικά, } f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x}, \quad x \in (-2, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$Γ. 2. \quad f'(x) \frac{x - (x+2)\ln(x+2)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Θεωρούμε  $g(x) = x - (x+2)\ln(x+2)$

Οπότε για  $x = -1$  η  $g$  παρουσιάζει μέγιστο άρα,  $g(x) \leq g(-1) \Rightarrow g(x) < 0$

Οπότε και  $f'(x) < 0$

Άρα  $f$  γνησίως φθίνουσα στα  $(-2, 0)$ ,  $(0, +\infty)$  και  $f$  δεν έχει ακρότατα.

$$Γ. 3. \quad \Delta_1 = (-2, 0)$$

$$\Delta_2 = (0, +\infty)$$

$f$  γνησίως φθίνουσα και συνεχής

$f$  γνησίως φθίνουσα και συνεχής

$$f(\Delta_1) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$f(\Delta_2) = (0, +\infty)$$

$$f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \mathbb{R}$$

Γ. 4.  $f(x) = 2016$

Επειδή  $2016 \in f(\Delta_1)$  και  $f$  γνησίως φθίνουσα

Άρα 1 ακριβώς αρνητική ρίζα

Επειδή  $2016 \in f(\Delta_2)$  και  $f$  γνησίως φθίνουσα

Άρα 1 ακριβώς θετική ρίζα

Δηλαδή 2 ακριβώς ετερόσημες ρίζες

Γ. 5. Θεωρούμε  $h(x) = f(x) + (x - x_2) \cdot g(x) \cdot e^{-x} - 2016$

$$h(x_2) = 0$$

Άρα  $h(x) \geq h(x_2)$

Οπότε τοπικό ελάχιστο  $x_2$ , από Fermat  $h'(x_2) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow g'(x_2) > 0$

Γ. 6. Θ.Μ.Τ. για  $f(t) = \ln t$  στο  $[2, x + 2]$

$f'$  γνησίως φθίνουσα και ισχύει  $2 < \xi < x$

$$\Leftrightarrow f'(2) > f'(\xi) > f'(x)$$

Γ. 7.  $(2 + 2016)^{2015} < (2 + 2015)^{2016} \Leftrightarrow$

$$f(2016) < f(2015) \Leftrightarrow$$

$$2016 > 2015$$

Γνησίως φθίνουσα ισχύει.