<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤ</u>

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$.

Οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4e^x}{e^x+7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4e^x}{e^x(1+7e^{-x})} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{1+7\cdot e^{-x}} = \dfrac{4}{1+0} = 4$.

Άρα η y = 4 οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4e^x}{e^x+7} = \dfrac{4\cdot 0}{0+7} = 0$. Άρα η y = 0 είναι οριζίντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β) Είναι $f'(x) = \dfrac{4e^x(e^x+7) - e^x\cdot 4e^x}{(e^x+7)^2} = \dfrac{28e^x}{(e^x+7)^2} > 0$ για κάθε $x\in\Re$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$. Επειδή $f\uparrow$ στο $\Re$ το σύνολο τιμών της θα είναι :

$f(\Re) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x+\infty} f(x)) = (0,4)$ (τα όρια από το α ερώτημα)

Άρα $0<f(x)<4$.

γ) Είναι $f''(x) = \dfrac{28\cdot e^x(e^x+7)^2 - 2(e^x+7)\cdot e^x\cdot 28e^x}{(e^x+7)^4} =$

$$= \frac{28e^x(e^x+7-2e^x)}{(e^x+7)^3} = \frac{28e^x}{(e^x+7)^3}\cdot(7-e^x)$$

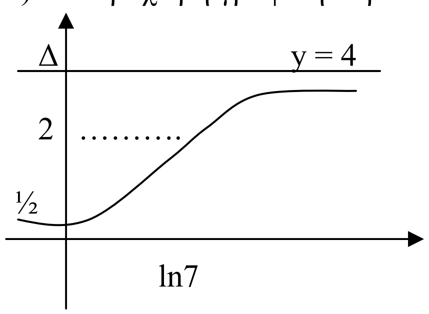
Επομένως $f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow 7-e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 7 \Leftrightarrow x\leq \ln 7$

Οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας :

x	$-\infty$	$\ln 7$	$+\infty$
f''	+		-
f	κυρτή		κοίλη

Η f παρουσιάζει στο x = ln7 σημείο καμπής το Α(ln7, 2) επομένως στο σημείο αυτό η εφαπτομένη διαπερνά την C_f.

δ)Μια πρόχειρη γραφική παράσταση της C_f θα είναι : $\left(f(o) = \dfrac{1}{2}\right)$



το ζητούμενο εμβαδό είναι :

$$E=\int_0^{\ln 7}|f(x)|d(x)=\int_0^{\ln 7}f(x)dx=\int_0^{\ln 7}\frac{4e^x}{e^x+7}dx=\int_0^{\ln 7}\frac{4(e^x+7)'}{e^x+7}dx=$$

$$=\int_0^{\ln 7}(4(\ln e^x+7))'dx=4[\ln(e^x+7)]_0^{\ln 7}=4[\ln(7+7)-\ln(1+7)]=$$

$$=4(\ln 14-\ln 8)=4\ln\frac{14}{8}=4\cdot\ln\frac{7}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

α) $$f'(x)=\frac{1}{\frac{e^x}{e^x+1}}\cdot\left(\frac{e^x}{e^x+x}\right)'=\frac{\cancel{e^x+1}}{e^x}\cdot\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^{\cancel{2}}}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$$

Άρα $f'(x)=g'(x)$ επομένως $f(x)=g(x)+c$

Για x = 0 : $$\left.\begin{matrix} f(0)=g(0)+c \\ f(0)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2\end{matrix}\right\}-\ln 2=-\ln 2+c\Rightarrow c=0$$

Άρα $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\Re$.

β) $$f''(x)=\left(\frac{1}{e^x+1}\right)'=\frac{-(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}<0$$ άρα f κοίλη στο $\Re$

γ) $$\phi(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt\Rightarrow\phi(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt-\int_\alpha^x f(t)dt,\quad \alpha\in\Re$$

$\varphi'(x)=f(x+1)-f(x)$

Άρα $$\frac{1}{e^{x+1}+1}<\phi'(x)<\frac{1}{e^x+1}\Leftrightarrow\frac{1}{e^{x+1}+1}<f(x+1)-f(x)<\frac{1}{e^x+1}\quad (2)$$

Για την f ισχύει το ΘΜΤ στο [x, x+1] άρα υπάρχει $\xi\in(x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{\cancel{x}+1-\cancel{x}}$$

Άρα $$(2)\Leftrightarrow\frac{1}{e^{x+1}+1}<f'(\xi)<\frac{1}{e^x+1}\Leftrightarrow f'(x+1)<f'(\xi)<f'(x)$$

που ισχύει διότι $f''(x)<0$ οπότε f ′↑ και x+1<ξ<x

δ) $$\int_{x^2}^{x^2+1}f(t)dt+\int_{x+1}^{x}f(t)dt=0\Leftrightarrow\int_{x^2}^{x^2+1}f(t)dt=\int_x^{x+1}f(t)dt\Leftrightarrow\phi(x^2)=\phi(x)\quad (3)$$

είναι $f'(x)=\dfrac{1}{e^x+1}>0$ και άρα f↑ στο $\Re$

επίσης από το γ ερώτημα : $\varphi'(x)>\dfrac{1}{e^{x+1}+1}>0$

άρα φ↑ κα επομένως φ 1-1 επομένως $(3)\Leftrightarrow x^2=x\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$