ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ : ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ (3η Δημοσίευση) (25-4-2007)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Θεωρία

Α.2. Θεωρία

Β. α) Λ β) Σ γ) Λ

Γ. f κοίλη , άρα f΄ γνησίως φθίνουσα στο (0, +∞).

Εφαρμόζοντας θ.Μ.Τ στα [2,4] και [4,6] έχουμε:

Υπάρχει $\xi_1 \in (2,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(4)-f(2)}{2}$ **και**

υπάρχει $\xi_2 \in (4,6)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(6)-f(4)}{2}$

Επειδή $\xi_1<\xi_2$ και f ΄ γνησίως φθίνουσα έχουμε: $f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow$ $\dfrac{f(4)-f(2)}{2} > \dfrac{f(6)-f(4)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot f(4) > f(2)+f(6)$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^2+x-2}{x^4+x^2+2}$

α)Να υπολογίσετε τα α, β∈ ℜ ώστε να ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha x+\beta-x^3 f(x))=0$ **(1) (μον. 15)**

β)Να βρείτε το όριο $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4f(x)-4x^2+3\eta\mu x}{2x^2+2x-x^4f(x)}$ **. (μον. 10)**

<u>Λύση</u>:

α) (1) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3f(x)-(\alpha x+\beta))=0$ Άρα η ευθεία y=αx+β είναι πλάγια ασύμπτωση της συνάρτησης $x^3f(x)$ στο $+\infty$

Άρα $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3f(x)}{x}$, $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}[x^3f(x)-\alpha x]$

$\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2f(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4}{x^4}=2$

$\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^5+x^4-2}{x^4+x^2+2}-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^5+x^4-2-2x^5-2x^3-4x}{x^4+x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^4}=1$

Άρα η ευθεία ε: y=2x+1

Είναι πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης $h(x)=x^3 f(x)$ στο $+\infty$

β) $A=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x[2(x^3f(x)-2x)+\dfrac{3\eta\mu x}{x}]}{x[(2x+1-x^3f(x))+1]}=\dfrac{2\cdot 1+0}{0+1}=2$

αφού $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3\eta\mu x}{x}=0$

διότι $\left|\dfrac{3\eta\mu x}{x}\right|\le\left|\dfrac{3}{x}\right|\Rightarrow-\left|\dfrac{3}{x}\right|\le\dfrac{3\eta\mu x}{x}\le\left|\dfrac{3}{x}\right|$

και επειδή $\lim_{x\to+\infty}\left|\dfrac{3}{x}\right|=0$ από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι και $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3\eta\mu x}{x}=0$

ΘΕΜΑ 3^o

Α. **(i) Δίνεται συνάρτηση F με $F(x)=\int_1^x e^{t^2}dt-\frac{1}{2}\left(e^{x^2}-e\right)$ και $x\ge 1$.**

Ν' αποδείξετε ότι $F(x)\le 0$ **(μον. 3)**

(ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{F(x)}{x^2-1}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=1$. **(μον. 3)**

(iii) Αν $g(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$, ν' αποδείξετε ότι:

$g(x)-g(1)\ge\int_1^x e^t dt$,για $x\ge 1$ ($t\ge 1$) **(μον. 4)**

(iv) Ν' αποδείξετε ότι η συνάρτηση $G(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$, $x\in\Re$ είναι περιττή.

(μον. 4)

Β. Αν η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο $\Re$ συνάρτησης f τέμνει τις ευθείες y=2 και y= -3 σε σημεία με τετμημένες x=1 και x=4 αντίστοιχα , να δείξετε ότι :

α) Η C_f τέμνει τον x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο. **(μον. 4)**

β) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,4)$ τέτοιοι ώστε : $\dfrac{2}{f'(\xi_1)}+\dfrac{3}{f'(\xi_2)}=-3$ **(μον. 7)**

Λύση

Α. (i) $F'(x)=e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}2x=e^{x^2}(1-x)$.

Για $x>1\Rightarrow 1-x<0\Rightarrow F'(x)<0$, άρα F γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Είναι $F(1)=0$, επομένως: $x\ge 1\Rightarrow F(x)\le F(1)\Rightarrow F(x)\le 0$.

(ii) $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{F(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{F'(x)}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to1^+}\frac{F'(x)}{2x} = \lim_{x\to1^+}\frac{1}{2x}\lim_{x\to1^+}[e^x(1-x)] = 0$

Αρα η x=1 δεν είναι κατακ. Ασύμπτ. της C_f.

(iii) Είναι g(1)=0 , $\int_1^x e^t dt = [e^t]_1^x = e^x - e$

Αρα $g(x)-g(1) \geq \int_1^x e^t dt \Leftrightarrow \int_1^x e^{t^2} dt \geq e^x - e$

Θεωρούμε :$\Phi(x)= \int_1^x e^{t^2}dt - e^x + e$. $\Phi'(x)= e^{x^2} - e^x > 0$ για κάθε x>1, άρα Φ(χ) γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Είναι Φ(1)=0 και για $x\geq1 \Rightarrow \Phi(x) \geq \Phi(1) \Rightarrow \Phi(x) \geq 0$.

(iv) Είναι $\mathbf{G(x)} = \int_0^x e^{t^2}dt$ και $\mathbf{G(-x)} = \int_0^{-x} e^{t^2}dt$ **.**Θα δείξουμε ότι G(x)= - G(-x).

Στην G(x) θέτουμε t = -u ⇒ dt = -du , όταν t=x⇒u= -x , όταν t=0⇒ u=0.

Αρα $\mathbf{G(x)} = \int_0^x e^{t^2}dt = \int_0^{-x} e^{u^2}(-du) = -\int_0^{-x} e^{u^2}du = -G(-x)$

Β. α) Είναι f(1)=2 και f(4)= -3 , άρα f(1)·f(4) = -6<0 . Ειναι f παραγωγίσιμη στο ℜ ,άρα f συνεχής στο [1,4] οπότε από το θ. Bolzano , υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(1,4) τέτοιο ώστε f(ξ)=0. Δηλαδή η C_f τέμνει τον x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα [1,ξ] και [ξ,4] , άρα ισχύει το θ.Μ.Τ. σ' αυτά και επομένως υπάρχουν $\xi_1\in(1,\xi)$ και $\xi_2\in(\xi,4)$ τέτοια ώστε :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\xi)-f(1)}{\xi-1} = \frac{-2}{\xi-1} \Rightarrow \frac{2}{f'(\xi_1)} = 1-\xi \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(4)-f(\xi)}{4-\xi} = \frac{-3}{4-\xi} \Rightarrow \frac{3}{f'(\xi_2)} = -4+\xi$$

Αρα : $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} = 1-\xi-4+\xi = -3$

ΘΕΜΑ 4^o

Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση f: ℜ→ℜ για την οποία ισχύει:

- **είναι παραγωγίσιμη στο ℜ**
- **g(x)=**$\int_2^x xf(tx)dt + 8x - x^4 \geq 0$**, για κάθε x∈ℜ.**

α. Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την g΄(x) (μον. 5)

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(0,4) τέτοιο ώστε : f΄(ξ)=2. (μον. 12)

Β. Έστω η τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$f^{(3)}(x) + f(x) + f(x) = 0$, x ∈R. (1)

α. Αν η $g(x) = [f''(x)]^2 + [f'(x)]^2 + 2f(x)f'(x)$ είναι σταθερή, τότε να δείξετε ότι και η f είναι σταθερή.

(μον. 4)

β. Αν $f''(1) + f(1) = -1$ και $f''(0) + f(0) = 1$,να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^0 f(x)dx$.

(μον. 4)

<u>Λύση</u>

Α. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_2^x xf(tx)dt$ θέτουμε $xt=u \Rightarrow xdt=du$ Οταν $t= 2\Rightarrow$

$u=2x$, όταν $t=x \Rightarrow u= x^2$, άρα: $\int_2^x xf(tx)dt = \int_{2x}^{x^2} f(u)du$

Αρα $g(x)= \int_{2x}^{x^2} f(u)du +8x - x^4 \geq 0$ για κάθε $x\in\Re$ (1)

Είναι $g(0)=\ldots=0$ και $g(2)= \ldots=0$ Αρα η (1) δίνει: $g(x) \geq g(0)$ και $g(x) \geq g(2)$ για κάθε $x\in\Re$ και επειδή g παραγωγίσιμη στο x=0 και x=2 από το θ. F. έχουμε ότι:$g'(0)=0$ και $g'(2)=0$ (2)

$g'(x)= 2x\cdot f(x^2) - 2\cdot f(2x)+8 - 4x^3$, οπότε:

$g'(0)=0 \Rightarrow\ldots f(0)=4$

$g'(2)=0\Rightarrow\ldots f(2)= 12$

Εφαρμόζοντας θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα [0,4] έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0} \Rightarrow f'(\xi)= 2$.

Β. α) Επειδή g σταθερή θα ισχύει: $g'(x)=0 \Rightarrow \ldots 2f(x)\cdot[f^{(3)}(x) + f(x) + f(x)]+2(f'(x))^2 =0$ και λόγω της (1) προκύπτει ότι : $(f'(x))^2 =0$ ή $f'(x) =0$ οπότε f(x) σταθερή.

β) $\int_1^0 f(x)dx \overset{(1)}{=} \int_1^0 \left(-f^{(3)}(x)-f'(x)\right)dx = -\int_1^0 \left(f''(x)\right)'dx - \int_1^0 f'(x)dx = \ldots =$

$= - [f''(0)+f(0)]+f''(1)+f(1)= - 2$.