

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 3^ο

B. 1. $f''(x) - 2f'(x) - 2f'(x) + 4f(x) = 0$

$$(f'(x) - 2f(x))' - 2(f'(x) - 2f(x)) = 0 \quad \text{Έστω } g(x) = f'(x) - 2f(x)$$

$$g'(x) - 2g(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x}g'(x) - 2e^{-2x}g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^{-2x}g(x))' = 0 \Rightarrow e^{-2x}g(x) = c \Rightarrow e^{-2x}(f'(x) - 2f(x)) = c$$

$$\stackrel{x=0}{\Rightarrow} 1 \cdot (-e - 2 \cdot 0) = c \Rightarrow c = -e$$

$$e^{-2x}(f'(x) - 2f(x)) = -e \Rightarrow f'(x) - 2f(x) = -e \cdot e^{2x}$$

$$\Rightarrow e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) = -e$$

$$(e^{-2x}f(x))' = (-e \cdot x)' \Rightarrow e^{-2x}f(x) = -e \cdot x + c_1 \stackrel{x=0}{\Rightarrow} 0 = c_1$$

$$\Rightarrow e^{-2x}f(x) = -e \cdot x \Rightarrow f(x) = -e \cdot x \cdot e^{2x} \Rightarrow f(x) = -x \cdot e^{2x+1}$$

B. 2. $f'(x) = -e^{2x+1} - x \cdot 2 \cdot e^{2x+1} = -e^{2x+1}(2x + 1)$

f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{2}]$

γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

μέγιστο στο $x = -\frac{1}{2}$ το $f(-\frac{1}{2}) = -(-\frac{1}{2})e^0 = \frac{1}{2}$

B. 3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^{2x+1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-2e^{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x+1}}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{2x+1}) = -\infty$$

B. 4. $f''(x) = -2 \cdot e^{2x+1} - 2(2x + 1)e^{2x+1} = -2e^{2x+1}(2x + 2)$

B. 5. $\left. \begin{array}{l} f'(0) = -e^1 \cdot 1 = -e \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \varepsilon : y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y = -e \cdot x$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[-\frac{1}{2}, 0]$ η C_f βρίσκεται κάτω από την ε στο $[-\frac{1}{2}, 0]$

$$\text{Άρα } E = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (-ex + x \cdot e^{2x+1}) dx = -e \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \int_{-\frac{1}{2}}^0 x \cdot e^{2x+1} dx = -e \left(0 - \frac{1}{2} \right) + I_1 = \frac{e}{8} + I_1$$

$$I_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^0 x \cdot \left(\frac{1}{2} e^{2x+1} \right)' dx = \left[\frac{1}{2} x e^{2x+1} \right]_{-\frac{1}{2}}^0 - \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{2} e^{2x+1} dx = -\frac{1}{4} e + \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } E = \frac{e}{8} - \frac{e}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{e}{8} = \frac{4-e}{8} \tau. \mu.$$

B. 6. $\xi \rightarrow x : f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = f'\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sigma\upsilon\nu x - f'\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \eta\mu x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(f\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) \cdot \eta\mu x \right)' = 0$$

Έστω $g(x) = f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \eta\mu x \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ αρκεί να δείξετε ότι υπάρχει

$\xi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοια ώστε $g'(\xi) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \eta\mu 0 = 0 \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = f(0) \cdot \eta\mu \frac{\pi}{4} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{υπάρχει } \xi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ τέτοια ώστε } g'(\xi) = 0$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. f κυρτή $\Leftrightarrow f'$ γνησίως αύξουσα

$$\begin{aligned} \text{Από } i) \int_0^1 \frac{f''(x)}{e^x} dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx &= \frac{f'(1)}{e} + \frac{f(1)}{e} - \frac{e}{e} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))' e^{-x} dx - \int_0^1 f(x) \cdot e^{-x} dx &= \frac{f'(1)}{e} + \frac{f(1)}{e} - 1 \\ \Rightarrow [f'(x) \cdot e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 f'(x) e^{-x} dx - \int_0^1 f(x) \cdot e^{-x} dx &= \frac{f'(1)}{e} + \frac{f(1)}{e} - 1 \\ \Rightarrow \frac{f'(1)}{e} - f'(0) + [f(x) \cdot e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 f(x) e^{-x} dx - \int_0^1 f(x) \cdot e^{-x} dx &= \\ = \frac{f'(1)}{e} + \frac{f(1)}{e} - 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow f'(0) = 0. \end{aligned}$$

Β. $f(0) = 1, f'(0) = 0$ και f' γνησίως αύξουσα άρα $x = 0$
μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$. Οπότε για $x > 0 \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f'(x) > 0$. Δηλαδή f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Οπότε
για $x > 0 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > 1$.

Γ. Επειδή η f γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα

$$f([0, +\infty)) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = [1, +\infty)$$

Για να βρούμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ απο iii) $f'(x) + (-2x)'f(x) > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (e^{-2x} \cdot f(x))' > 0$ θεωρούμε $h(x) = e^{-2x} \cdot f(x)$ στο $[0, +\infty)$
 $h(0) = 1$ οπότε $x = 0$ μοναδική ρίζα της $h(x) = 1$ και
 h γνησίως αύξουσα. Για $x > 0 \stackrel{h \uparrow}{\Leftrightarrow} h(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) > e^{2x}$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$ άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 $f(x) > e^{2x} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{e^{2x}}$

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ με $f(x) > 0$

$$\text{άρα, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ : $\ln e^{f(x)} = \ln 2016 \Leftrightarrow f(x) = \ln 2016$

Επειδή $\ln 2016 \in f([0, +\infty))$

και f γνησίως αύξουσα άρα μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$

Δ. i. $f(1) = 2$

θεωρημα Bolzano για $g(x) = 2f(x) - 3$ στο $[0,1]$ g συνεχής στο $[0,1]$

ως πράξεις συνεχών χυναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= 2f(0) - 3 = -1 < 0 \\ g(1) &= 2f(1) - 3 = 1 > 0 \end{aligned} \right\} g(0) \cdot g(1) < 0$$

υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1) \subseteq (0, +\infty)$

ii. Επειδή $f(x) > 1 \Rightarrow f(x) - 1 > 0$ άρα $\int_0^1 (f(x) - 1)dx > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 1dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx > 1$$

και Θ.Μ.Τ. για f στα $[0, x]$ $[x, 1]$ θα υπάρχουν $\xi_1 \in (0, x)$ $\xi_2 \in (x, 1)$

$$\text{τέτιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x)-1}{x} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$$

$$f' \text{ γνησίως αύξουσα άρα } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$$

$$\frac{f(x)-1}{x} < \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \xrightarrow{x \cdot (1-x) > 0} (f(x) - 1)(1-x) < x \cdot (f(1) - f(x))$$

$$f(x) - xf(x) - 1 + x < 2x - xf(x) \Rightarrow f(x) < x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 (x + 1)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx < \frac{3}{2}.$$

$$\text{Τελικά, } 1 < \int_0^1 f(x)dx < \frac{3}{2}.$$

iv. Επειδή f γνησίως αύξουσα άρα f είναι 1-1 δηλαδή f αντιστρέφεται.

$$\int_1^2 f^{-1}(x)dx \quad \text{θέτω } f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u) \Rightarrow dx = f'(u)du$$

$$\text{Άρα } \int_1^2 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 uf'(u)du = [uf(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u)du =$$

$$= f(1) - \int_0^1 f(u)du = 2 - \int_0^1 f(u)du.$$

$$\text{Από Δ ii ερώτημα } 1 < \int_0^1 f(x)dx < \frac{3}{2} \Rightarrow 2 - \frac{3}{2} < 2 - \int_0^1 f(x)dx < 2 - 1$$

$$\frac{1}{2} < \int_1^2 f^{-1}(x)dx < 1.$$