# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

**ΘΕΜΑ 3^ο^**

Β. 1. $f''(x) - 2f'(x) - 2f'(x) + 4f(x) = 0$

$(f'(x) - 2f(x))' - 2(f'(x) - 2f(\chi)) = 0$ Έστω $g(x) = f'(x) - 2f(x)$

$g'(x) - 2g(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x}g'(x) - 2e^{-2x}g(x) = 0$

$\Leftrightarrow (e^{-2x}g(x))' = 0 \Rightarrow e^{-2x}g(x) = c \Rightarrow e^{-2x}(f'(x) - 2f(x)) = c$

$\overset{x=0}{\Longrightarrow} 1 \cdot (-e - 2 \cdot 0) = c \Rightarrow c - e$

$e^{-2x}(f'(x) - 2f(x)) = -e \Rightarrow f'(x) - 2f(x) = -e \cdot e^{2x}$

$\Rightarrow e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) = -e$

$(e^{-2x}f(x))' = (-e \cdot x)' \Rightarrow e^{-2x}f(x) = -e \cdot x + c_1 \overset{x=0}{\Longrightarrow} 0 = c_1$

$\Rightarrow e^{-2x}f(x) = -e \cdot x \Rightarrow f(x) = -e \cdot x \cdot e^{2x} \Rightarrow f(x) = -x \cdot e^{2x+1}$

Β. 2. $f'(x) = -e^{2x+1} - x \cdot 2 \cdot e^{2x+1} = -e^{2x+1}(2x+1)$

$f$ *γνησίως αύξουσα στο* $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

*γνησίως φθίνουσα στο* $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

*μέγιστο στο* $x = -\frac{1}{2}$ *το* $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)e^{o} = \frac{1}{2}$

Β. 3.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-xe^{2x+1}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{e^{2x-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{-2e^{2x-1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x+1}}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-xe^{2x+1}) = -\infty$$

Β. 4. $f''(x) = -2 \cdot e^{2x+1} - 2(2x+1)e^{2x+1} = -2e^{2x+1}(2x+2)$

Β. 5. $\left.\begin{matrix} f'(o) = -e^1 \cdot 1 = -e \\ f(o) = 0 \end{matrix}\right\}$ $\varepsilon\ :\ y - f(o) = f'(o)(x - 0) \Rightarrow y = -e \cdot x$

*Επειδή η* $f$ *είναι κυρτή στο* $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ *η* $C_f$ *βρίσκεται κάτω απο την* $\varepsilon$ *στο* $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

$$\text{Άρα } E=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(-ex+x\cdot e^{2x+1})dx=-e\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x\cdot e^{2x+1}dx=-e\left(0-\frac{\frac{1}{4}}{2}\right)+I_1=\frac{e}{8}+I_1$$

$$I_1=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)'dx=\left[\frac{1}{2}xe^{2x+1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{.0}-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{2}e^{2x+1}dx=-\frac{1}{4}e+\frac{1}{2}$$

Άρα $E=\frac{e}{8}-\frac{e}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{e}{8}=\frac{4-e}{8}\tau.\mu.$

B. 6. $\xi\to x: f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=f'\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sigma\upsilon\nu x-f'\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\eta\mu x=0$$

$$\Leftrightarrow\left(f\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)\cdot\eta\mu x\right)'=0$$

Έστω $g(x)=f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\eta\mu x \quad x\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ *αρκεί να δείξετε οτι υπάρχει* $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ *τέτοια ώστε* $g'(\xi)=0$

$$\left.\begin{aligned}g(o)&=f\left(\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu o=0\\ g\left(\frac{\pi}{4}\right)&=f(o)\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}=0\end{aligned}\right\}\overset{\Theta\mathcal{R}}{\Longrightarrow}\text{ υπάρχει } \xi\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\text{ τέτοια ώστε } g'(\xi)=0$$

**ΘΕΜΑ 4ο**

A. $f$ *κυρτή* $\Leftrightarrow f'$ *γνησίως αύξουσα*

*Από i)* $\int_0^1\frac{f''(x)}{e^x}dx-\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{f'(1)}{e}+\frac{f(1)}{e}-\frac{e}{e}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int_0^1(f'(x))'e^{-x}dx-\int_0^1f(x)\cdot e^{-x}dx=\frac{f'(1)}{e}+\frac{f(1)}{e}-1$$

$$\Rightarrow[f'(x)\cdot e^{-x}]_0^1+\int_0^1f'(x)e^{-x}dx-\int_0^1f(x)\cdot e^{-x}dx=\frac{f'(1)}{e}+\frac{f(1)}{e}-1$$

$$\Rightarrow\frac{f'(1)}{e}-f'(o)+[f(x)\cdot e^{-x}]_0^1+\int_0^1f(x)e^{-x}dx-\int_0^1f(x)\cdot e^{-x}dx=$$

$$=\frac{f'(1)}{e}+\frac{f(1)}{e}-1\Rightarrow\cdots\Rightarrow f'(o)=0.$$

Β. $f(0)=1,\ \ f'(0)=0$ $\quad και \quad$ $f'$ γνησίως αύξουσα άρα $x=0$

μοναδική ρίζα της $f'(x)=0$. Οπότε για $x>0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(o) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)>0$. Δηλαδή $f$ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Οπότε

για $x>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>1$.

Γ. Επειδή η $f$ γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα

$$f\big([0,+\infty)\big)=[f(0),\lim_{x\to+\infty} f(x)=[1,+\infty)$$

Για να βρούμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ απο iii) $f'(x)+(-2x)'f(x)>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(e^{-2x}\cdot f(x)\right)'>0$ θεωρούμε $h(x)=e^{-2x}\cdot f(x)$ στο $[0,+\infty)$

$h(o)=1$ οπότε $x=0$ μοναδική ρίζα της $h(x)=1$ και

$h$ γνησίως αύξουσα. Για $x>0 \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x)>1 \Leftrightarrow f(x)>e^{2x}$.

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$ αρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f(x)>e^{2x}>0 \Rightarrow 0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{e^{2x}}$

$$\text{Από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0 \text{ με } f(x)>0$$

$$\text{άρα},\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ : $\ln e^{f(x)}=\ln 2016 \Leftrightarrow f(x)=ln2016$

Επειδή $ln2016 \in f\big([0,+\infty)\big)$

και $f$ γνησίως αύξουσα άρα μοναδική ρίζα στο $[0,+\infty)$

Δ. i. $f(1) = 2$

$\theta\varepsilon\omega\rho\eta\mu\alpha$ $Bolzano$ $\gamma\iota\alpha$ $g(x) = 2f(x) - 3$ $\sigma\tau o$ $[0,1]$ $g$ $\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma$ $\sigma\tau o$ $[0,1]$

$\omega\varsigma$ $\pi\rho\acute{\alpha}\xi\varepsilon\iota\varsigma$ $\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\omega}\nu$ $\chi\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu$

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = 2f(0) - 3 = -1 < 0 \\ g(1) = 2f(1) - 3 = \quad 1 > 0 \end{array}\right\} g(0)\cdot g(1) < 0$$

$\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota$ $\mu\iota\alpha$ $\tau o\upsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu$ $\rho\acute{\iota}\zeta\alpha$ $\sigma\tau o$ $(0,1) \subseteq (0.+\infty)$

ii. $E\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$ $f(x) > 1 \Rightarrow f(x) - 1 > 0$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\int_0^1 (f(x) - 1)dx > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 1dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx > 1$

$\kappa\alpha\iota$ $\Theta.M.T.\gamma\iota\alpha$ $f$ $\sigma\tau\alpha$ $[0,x]$ $[x,1]$ $\theta\alpha$ $\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi o\upsilon\nu$ $\xi_1 \in (0,x)$ $\xi_2 \in (x,1)$

$\tau\acute{\varepsilon}\tau\iota o$ $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon$ $f'(\xi_1) = \frac{f(x)-1}{x}$ $\qquad f'(\xi_2) = \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$

$f'$ $\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma$ $\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$

$\frac{f(x)-1}{x} < \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \xrightarrow{x\cdot(1-x)>0} (f(x) - 1)(1 - x) < x \cdot (f(1) - f(x))$

$f(x) - xf(x) - 1 + x < 2x - xf(x) \Rightarrow f(x) < x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 (x + 1)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx < \frac{3}{2}.$

$T\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\alpha}$, $1 < \int_0^1 f(x)dx < \frac{3}{2}.$

iv. $E\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$ $f$ $\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma$ $\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $f$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $1 - 1$ $\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}$ $f$ $\alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\rho\acute{\varepsilon}\varphi\varepsilon\tau\alpha\iota.$

$\int_1^2 f^{-1}(x)dx$ $\quad \theta\acute{\varepsilon}\tau\omega$ $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u) \Rightarrow dx = f'(u)du$

$\acute{A}\rho\alpha$ $\int_1^2 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 uf'(u)du = [uf(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u)du =$

$= f(1) - \int_0^1 f(u)du = 2 - \int_0^1 f(u)du.$

$A\pi\acute{o}$ $\Delta$ $ii$ $\varepsilon\rho\acute{\omega}\tau\eta\mu\alpha$ $1 < \int_0^1 f(x)dx < \frac{3}{2} \Rightarrow 2 - \frac{3}{2} < 2 - \int_0^1 f(x)dx < 2 - 1$

$\frac{1}{2} < \int_1^2 f^{-1}(x)dx < 1.$