ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ (24–2–2011)

ΘΕΜΑ Α

Α. Θεωρία βιβλίου (θ. Fermat)
Β . θεωρία βιβλίου
Γ . α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Από την ισότητα $z^3=1$ έχουμε και $\left|z^3\right| = 1 \Leftrightarrow |z|^3=1 \Leftrightarrow |z| = 1$

Όμως αφού $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 =1 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}= 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{z}= \frac{1}{z}\cdot$ (1)

Ο $W= z- \frac{1}{z} \overset{(1)}{=} z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}\,(z)\cdot i$

Αφού $z \notin \Re$ το $\mathrm{Im}\,(z) \neq 0$, οπότε ο αριθμός $2\,\mathrm{Im}\,(z)\cdot i$ είναι καθαρά φανταστικός.
Αρα ο W είναι φανταστικός.

ii) Από την ισότητα $z^3 = 1$ έχουμε $z^3 -1 = 0$
δηλαδή $(z-1)\cdot(z^2 + z + 1) = 0$ όμως $z\neq 1$
αφού $z\notin \Re$, οπότε $z^2 + z+ 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z+1 = -z^2$
θα έχουμε λοιπόν ότι και $|z+1|=\left|-z^2\right|= |z|^2 =1$ (από (i) ερώτημα).

iii) Από το (ii) ερώτημα έχουμε πως
$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 1 = -z$ (2)
έχουμε λοιπόν :

$(iz)^{2010} + (1+z^2)^{2009} – (iz)^{2008} \overset{(2)}{=}$
$i^{2010}\cdot z^{2010} + (-z)^{2009} – i^{2008}\cdot z^{2008} =$
$= i^{4\cdot502+2}\cdot (z^3)^{670} – (z^3)^{669}\cdot z^2 - i^{4\cdot502+0}\cdot(z^3)^{669}\cdot z^1=$
$= -1\cdot(z^3)^{670} – (z^3)^{669}\cdot z^2 - 1\cdot(z^3)^{669}\cdot z^1 =$
$= -1 –z^2 –z$
$= - (z^2 +z+1) = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Α) Εστω η συνάρτηση $F:R\rightarrow R$, παραγωγίσιμη και τέτοια:
ώστε να ισχύει :$f^3 (x)+e^{3f(x)} = e^x-x$ (1)

α) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

παραγωγίζοντας την (1) έχουμε:

$3\, f^2(x)\cdot f'(x) + 3e^{3f(x)}\ f'(x) = e^x - 1$

$\Leftrightarrow 3(f^2(x) + e^{3f(x)})\cdot f'(x) = e^x - 1$

Επειδή $3(f^2(x) + e^{3f(x)}) > 0\ \forall x \in \Re$ θα ισχύει:

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$

οπότε έχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f′	-	0	+
f	↘		↗

Επομένως η f είναι : γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Β) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα, και να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο σύνολο των πραγματικών.

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών της f , η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x=0

Για x=0 η (1) δίνει :$f^3(0)+e^{3f(0)}= 1 \Leftrightarrow f^3(0) + e^{3f(0)}-1=0$

Αν θέσουμε f(0)= ω η εξίσωση γίνεται : $\omega^3+ e^{3\omega}-1=0$

Εστω $g(\omega) = \omega^3 +e^{3\omega}-1$, προφανής λύση ω=0

διότι g(0)= 0+1-1=0, Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$

με $g'(\omega) = 3\omega^2+3e^{3\omega} \rangle\ 0\ \ \forall \omega \in \Re$ Αρα η λύση ω=0 είναι μοναδική.

Επομένως f(0) =ω =0 μοναδική τιμή του ελάχιστου της f και άρα και μοναδική ρίζα της f(x) =0

Γ) Αν ισχύει : $f(x)-g(x) \geq 1-2e^x$ $\forall x \in \Re$ όπου g είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\Re$ με g(0) =1,να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο x=0.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$h(x) = f(x) – g(x) + 2e^x – 1$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ ως πράξεις των παραγωγίσιμων συναρτήσεων :f(x), g(x), $2e^x- 1$

με $h'(x) = f'(x) – g'(x) + 2e^x$

επειδή $f(x) – g(x) \geq 1-2e^x$ έχουμε ότι $h(x) \geq 0$

και $h(0) = f(0)- g(0) + 2e^0 -1 = 0-1+2-1=0$

επομένως $h(x) \geq h(0)$ για κάθε $x \in \Re$. Αρα η h παρουσιάζει στο x=0 ελάχιστο και επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο x=0 από το Θ.F θα ισχύει $h'(0)=0$

$\Rightarrow f'(0) – g'(0) + 2e = 0 \Rightarrow 0 – g(0) + 2 = 0 \Rightarrow g'(0) = 2$

Η εφαπτομένη της C_g στο x=0 είναι :

ε:y – g(0)= g′(0) (x-0) ή ε :y -1 = 2x ή ε:y =2x + 1.

ΘΕΜΑ Δ

α. Η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις των παραγωγίσιμων συναρτήσεων :
$2x$, x^2+1, $f(x)\ f'(x)$ με

$$g''(x) = 2f(x) + 2xf' + 2xf'(x) + (x^2+1)\cdot f''(x)$$

$$= 2f(x) + 4xf'(x) + (x^2+1)\cdot f'' \overset{(1)}{=} 0$$

Άρα η g(x) είναι σταθερή (g(x)=α) στο $I\Re$

β. Από το α ερώτημα έχουμε ότι g(x)=c
οπότε $2xf(x)+(x^2+1)f'(x)=c$ (2).
Η C_f διέρχεται από το O(0,0) άρα f(0)=0 και η ε είναι εφαπτομένη στο O
άρα f′(0)=2.
Για x=0 $(2): 2\cdot 0\cdot f(0) + (0^2+1)\cdot f'(0) = c,$ άρα c=2
Οπότε $(2): 2xf(x) + (x^2+1)f'(x) = 2$ ή $((x^2+1)f(x))' = (2x)'$
ή $(x^2+1)f(x) = 2x + c,$ Για x=0 : 0=c_1
άρα $(x^2+1)f(x) = 2x$ ή $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

γ. $f'(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x		-1		1	
f′	-	0	+	0	-
f	↘		↗		↘

τοπικό ελαχιστό : f(-1)=-1 τοπικό μέγιστο : f(1)= 1

$A_1 = (-\infty,-1],\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2} = 0,\quad f(A_1) = [-1,0)$

$A_2=(-1,1)$ $f(A_2)=(-1,1)$

$A_3 = [1,+\infty\},\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2} = 0,\quad f(A_3) = (0,1]$

Άρα $f(A)= f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=[-1, 1]$

δ. $(x^2+1)^2 = x \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+1} = 2(x^2+1) \Leftrightarrow f(x) = 2(x^2+1) \geq 2$ (1)
είναι $-1 \leq f(x) \leq 1$ οπότε η (1) είναι αδύνατη.

ε. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot συνx = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}\cdot συνx = 0$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+1} = 0$

και $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}συνx\right| \leq \dfrac{2x}{x^2+1} \Rightarrow -\dfrac{2x}{x^2+1} \leq \dfrac{2x}{x^2+1}συνx \leq \dfrac{2x}{x^2+1}$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
ΣΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ Α.- ΚΟΥΤΡΩΤΣΙΟΣ Δ.- ΘΕΟΔΩΡΙΔΟΥ Ε.- ΡΟΥΣΣΟΥ Χ.- ΓΚΙΛΙΝΑ Ε.- ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΟΥ Γ.- ΤΣΑΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ Κ.