ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής: $G(x)=F(x)+c$, $c\in\Re$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:

$$G(x)=F(x)+c\ ,\ c\in\Re$$

Α.2. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Α.3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

i. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ii. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)>0$, τότε $f(x)>0$ για τις τιμές του x κοντά στο x_0.

iii. Έστω f,g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο σύνολο $[\alpha, +\infty)$, όπου α ένας πραγματικός θετικός αριθμός. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=0$

iv. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α,β] και σημείο $x_0\in[\alpha,\beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι: $f'(x_0)=0$.

v. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot\ln(9+x^2)$, όπου $x\in\Re$.

1) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. Στη συνέχεια, να εξετάσετε αν υπάρχουν κρίσιμα σημεία της f και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της. Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη της Cf διαπερνά την καμπύλη και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
3) i) Αν f^{-1} συνεχής στο $\Re$, να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

ii) Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+\eta\mu x}{x}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$

B.2 Να δείξετε ότι η εξίσωση $(fof)(e^{-x})=(fof)(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο (0, 1).

B.3 Να δείξετε ότι $f(x)\geq x\cdot\ln 9$ για κάθε $x\geq 0$.

B.4 Να δείξετε ότι $2\int_0^{\sqrt{e}} f(x)dx>\ln 9^e$

B.5 Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f του άξονα x'x και τις ευθείες x = x_0 και x = 1, όπου x_0 είναι η θέση του σημείου καμπής της f.

B.6 **α)** Να δείξετε ότι $f(3x)-f(x)\geq 2xf'(x)$ για κάθε $x\geq 0$

β) $\int_0^3 f(x)dx>3\int_1^0 f(x)dx+6\ln 10$

B.7 Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από Cf^{-1} του άξονα x'x και της ευθείας x = ln10.

B.8 Αν f παράγουσα της f στο $\Re$, να βρείτε το
$\lim[F(x+2018)-F(x+2017)]$

B.9 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-2018}^{2018}\left(\int_{-2018}^{2018}f(x)F(t)dx\right)dt$

Επιμέλεια:

Στογιαννόπουλος Αντώνης – Τσαμητρόπουλος Κώστας – Ρούσσου Χρηστίνα – Κουτζιαμπασόπουλος Νίκος