ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ'ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του *Δ*. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «**Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] τότε είναι συνεχής στα α,β.**»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Α3.Πότε μια συνάρτησηf δεν είναι συνεχής στο σημείο του πεδίου ορισμού **x_0 ;**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Αν η συνάρτηση *g* είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f\circ g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g'(x_0)$.

γ. Αν $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, τότε η f είναι πάντα σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

δ. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής.

ε. Αν η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο *Α,* η παράγωγος της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική στο εσωτερικό του *Α.*

ΑΣΚΗΣΗ ΜΕ ΠΟΛΛΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\Re$ για τις οποίες ισχύουν :

- $g'(x)=\ln x+1$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)+2x_0-1,$ για κάθε $x_0\in(0,+\infty)$ και

  $f(1)=g(1)=0$

Β1. α) Να δείξετε ότι $g(x)=x\cdot\ln x$ και $f(x)=\ln x+x-1$

β) Να βρεθούν ρίζες και πρόσημο της f.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: *Γ.β)* x=1 μοναδική ρίζα της f. Για $\begin{matrix} x>1 \Leftrightarrow f(x)>0 \\ 0<x<1 \Leftrightarrow f(x)<0 \end{matrix}$

B2. Να δείξετε ότι για κάθε $a, \beta \in (0,+\infty)$ ισχύει

$$(\beta-\alpha)\ln(a\cdot e)<\ln\frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}<(\beta-\alpha)\cdot\ln(\beta\cdot e)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θ.Μ.Τ για g στο [α, β]

B3. α) Να λυθεί η εξίσωση: $\ln(e^{x}-x)=x-e^{x}+1$

β) Να λυθεί η ανίσωση: $\ln\frac{x^{4}+1}{x^{2}+1}<x^{2}-x^{4}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: α) x = 0 β) $x\in(-1,0)\cup(0,1)$

B4. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)=x\cdot\ln x$ και $h(x)=-\frac{1}{2}x^{2}+2x-\frac{3}{2}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

B5. Να υπολογιστούν τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)+1}$ ii. $\lim\limits_{x\to0^{+}}\left(f(x)-g(x)\right)$ iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{x^{2018}+9x^{2017}+5}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: i) 0 ii) $-\infty$ iii) 0

B6. Να μελετήσετε και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της g.

B7. Να βρεθεί πλήθος ριζών της εξίσωσης $\ln x=\frac{a}{x}$ για τις διάφορες τιμές του αϵR.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν $a<-\frac{1}{e}$ δεν έχει καμία ρίζα, αν $a=-\frac{1}{e}$ τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα, αν $-\frac{1}{e}<a<0$ έχει δύο ρίζες, αν $a\geq0$ τότε έχει μία ρίζα

B8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cg, την κοινή εφαπτομένη και τις ευθείες $x=\frac{1}{e}$ και x = 1.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $E=\frac{e^{2}-4e+5}{4e^{2}}$

Επιμέλεια: **Στογιαννόπουλος Αντώνης – Τσαμητρόπουλος Κώστας – Ρούσσου Χρηστίνα – Κουτζιαμπασόπουλος Νίκος**