ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Να λύσετε την εξίσωση: $3^x + 2^x = 5^x$.

Α.2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f , ορισμένη στο $[0,+\infty)$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και $f(0)=-1$.

α) Αν ισχύει: $f'(x)-2xf^2(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, να δείξετε ότι $f(x)\leq -\dfrac{1}{x^2+1}$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

β) Αν $g(x)=x^3 f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, να βρείτε το όριο:

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Παρατηρήσεις – Υποδείξεις:

Για Α.1 :
Αν η εξίσωση έχει τη μορφή $\alpha^x + \beta^x = \gamma^x$ με 0< α< β< γ, τότε διαιρούμε με γ^x και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x - 1$, βρίσκουμε την προφανή ρίζα και την μονοτονία της f για να δείξουμε ότι η ρίζα είναι μοναδική.

Για Α.2 :
α) Όταν μας δίνουν μια ανισότητα και μας ζητάνε να αποδείξουμε μια άλλη ανισότητα , τότε προτιμάμε να ξεκινήσουμε από τη δεδομένη ανισότητα ώστε να φτάσουμε σε μια ανισότητα της μορφής $(\pi)' > 0$ ή $(\pi)' < 0$. Την παράσταση(π) την θεωρούμε μια συνάρτηση και δουλεύουμε με αυτή την συνάρτηση της οποίας ξέρουμε την μονοτονία της.

β) Ισχύει χωρίς απόδειξη (2016 -17) ότι αν η $f(x) \leq g(x)$ και

i. $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ $(x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\})$

ii. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

ΘΕΜΑ Β

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύει: Η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Ο(0,0) και Α(1,e)

και : $f'(x) - \dfrac{f(x)}{x} = xe^x$, για κάθε $x\neq 0$.

Β.1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^x$, $x\in\Re$

B.2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=α, α∈ℜ.

B.3. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=f(x+1)-f(x)$, x>0. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την ανίσωση :

$f(x^2+1)+f(x^4)>f(x^4+1)+f(x^2)$, $x\neq 0$.

B.4. Αν ισχύει: lnβ – lnα < α – β για κάθε α,β>0 να δείξετε ότι α>β.

B.5. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(0,1) τέτοιο ώστε να ισχύει: $(\xi+1)\cdot e^{\xi-1}=1$

Παρατηρήσεις – Υποδείξεις:

Για B.1: Το θεώρημα : αν f συνεχής στο διάστημα Δ και f'(x)= 0, στο εσωτερικό του Δ τότε f(x)=c , σ' όλο το Δ αναφέρεται σε διάστημα . Δεν ισχύει η ίδια σταθερά όταν έχουμε ένωση διαστημάτων. Δηλαδή αν έχουμε $f'(x)=0$ για x≠0, δηλαδή x∈$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, τότε θα έχουμε $f(x)=\begin{cases} c_1, x<0 \\ c_2, x>0 \end{cases}$

Για B.3 : Η συνάρτηση g ορίζεται όταν x>0. Η συνάρτηση $g(x^2)$ είναι σύνθετη συνάρτηση και ορίζεται όταν $x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$. Ομοίως και η $g(x^4)$ ορίζεται όταν $x^4>0 \Leftrightarrow x\neq 0$. Άρα η απάντηση θα είναι για εκείνα τα x που ορίζεται η ανίσωση, δηλαδή για x≠0.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνονται f, g : (1, + ∞) →ℝ συνεχείς συναρτήσεις με $f(e^2)=ln2$ για τις οποίες ισχύουν :

- $g(x)=e^{f(x)}-lnx$, $x>1$
- $\left|e^{f(x)}-e^{f(y)}+ln\frac{y}{x}\right|\leq(x-y)^{2016}$ για κάθε x, y ∈ $(1,+\infty)$

Α) Να δείξετε ότι η g είναι σταθερή στο (1, + ∞).

Β) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln(lnx), x>1$

Γ) Να βρείτε τη μονοτονία της f, f' και να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητά της.

Δ) Για κάθε x∈ $(1,+\infty)$ να δείξετε ότι $\frac{1}{\ln(x+1)^{x+1}}<\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)<\frac{1}{\ln x^x}$

Ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2017e^x$ έχει δύο το πολύ ρίζες.

ΣΤ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $x_0=e^2$ και να αποδείξετε ότι για κάθε x∈ $(1,+\infty)$ ισχύει $2e^2\ln(lnx)\leq x+e^2\cdot ln\frac{4}{e}$

Ζ) Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης της f έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό e^3cm/sec.

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του κινητού Μ την χρονική στιγμή όπου η τετμημένη του ισούται με e^3

Επιμέλεια: Στογιαννόπουλος Αντώνης, Τσαμητρόπουλος Κων/νος, Ρούσσου Χρηστίνα, Κουτζιαμπασόπουλος Νίκος