ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ1ο

1.1 Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:● η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
● $f(\alpha)\neq f(\beta)$
τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

1.2.Ποια συνάρτηση ονομάζεται **παράγουσα της** ***f*** σε ένα διάστημα *Δ*;

1.3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.*

α. Καθώς το x αυξάνεται η εφαπτομένη της C_f στρέφεται κατά τη θετική φορά, τότε η f στρέφει τα κοίλα άνω.

β. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε υπάρχει αριθμός α κοντά στο x_0, ώστε $f(\alpha)<0$.

γ.Αν η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα**$[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, τότε πάντα είναι παραγωγίσιμη στα α και β.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.

ε. Να δικαιολογήσετε την απάντηση που θα δώσετε στην παρακάτω πρόταση:
Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\beta)<f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)<0$.

1.4. α)Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

Α) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$ Β) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$

Γ) $\lim_{x\to 0}[\ln(x^3+x+1)$ Δ) $\lim_{x\to 0}[\ln(x^3+x-1)]$

β) Να δικαιολογήσετε την απάντηση που δώσατε.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$

i. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.
ii. Να βρείτε τα ακρότατα της f και να εξετάσετε αν είναι ολικά.
iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της *f*.
iv. Να μελετήσετε την κυρτότητα της f και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
v. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 2a = ax + 3$ είναι ισοδύναμη της $f(x) = a$ και να βρείτε το πλήθος των λύσεων για τις διάφορες τιμές του $a \in R$.
vi. Να βρείτε την εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ και να υπολογίσετε το όριο $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{f^3(x) - 8}$.
vii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f την εφαπτομένη στο x = 1 και τον άξοναy'y.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + \ln x$

α.1. Να εξετάσετε την *f(x)* ως προς τα ακρότατα.

α.2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

α.3. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2+1) > f(x^4+1)$

β. Να εξετάσετε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της *f(x)*.

γ.1. Να δείξετε ότι η *f(x)* αντιστρέφεται.

γ.2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} και να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

γ.3. Να βρείτε τα όρια i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f^{-1}(x) - x}{f^{-1}(x)}$

δ. 1. Να δείξετε ότι η C_f και ο άξονας συμμετρίας των C_f , C_f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο (1,e).

δ.2. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1,e)$ ώστε η εφαπτομένη της $h(x) = x^2 - 2x \cdot \ln x - \ln x - 1$ στο σημείο της με τετμημένη x_0 να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

στ.1. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, τον άξονα xx' και τις ευθείες x=0 και

$x = e^2 - e + 1$.

στ.2. Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{xf^{-1}(x) - 2x}{x + \eta\mu x}$$

Επιμέλεια:

Στογιαννόπουλος Αντώνης – Κουτζιαμπασόπουλος Νίκος