

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 9

Β. α. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

Β. β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του διαφορικού λογισμού;

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ**, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

β. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\beta)$ μέγιστη τιμή της συνάρτησης, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f'(\beta) = 0$.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε έχει υποχρεωτικά ολικά ακρότατα τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

δ. Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ τότε $f''(x) > 0$.

ε. Αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της συνάρτησης $f(x)$, η εξίσωση $f(x)=y$ έχει λύση ως προς x τότε η f είναι 1 - 1.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω $z \in \mathbb{C}$ με την ιδιότητα $z^3 = 1$ και $z \notin \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

α) ο μιγαδικός $w = z - \frac{1}{z}$ είναι φανταστικός

Μονάδες 8

β) $|z + 1| = 1$

Μονάδες 8

γ) $(iz)^{2010} + (1+z^2)^{2009} - (iz)^{2008} = 0$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f^3(x) + e^{3f(x)} = e^x - x \quad (1)$$

α) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα, και να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 9

γ) Έστω g μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει:

$$f(x) - g(x) \geq 1 - 2e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } g(0)=1.$$

Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της με τεταμένη $x=0$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση:

$$(x^2 + 1)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) = 0 \quad (1) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x)$ είναι σταθερή στο \mathbb{R} .

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τον τύπο της f αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και ότι η εφαπτομένη της στο σημείο $O(0,0)$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y=2x$.

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x^2 + 1)^2 = x$ δεν έχει καμία ρίζα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 4

ε) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot \sin x)$

Μονάδες 4

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΣΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ Α.- ΚΟΥΤΡΩΤΣΙΟΣ Δ.- ΘΕΟΔΩΡΙΔΟΥ Ε.-

ΡΟΥΣΣΟΥ Χ.- ΓΚΙΛΙΝΑ Ε.- ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΟΥ Γ.-

ΤΣΑΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ Κ.