

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A.2. Έστω οι συναρτήσεις f, g συνεχείς σε ένα διάστημα Δ για τις οποίες ισχύει: $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 5

A.3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 3

A.4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f(x) = a^x$, $a > 0$, τότε ισχύει $(a^x)' = x a^{x-1}$.

β) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$.

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ε) Έστω οι αριθμοί $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ και η συνεχής στο \mathbb{R} συνάρτηση f . Αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε η f δεν έχει ρίζα στο (α, β) .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν τα εξής: $|(3 - 4i)z - 25| = 10$ και

$$\left| \frac{2w - 2 - 12i}{iw - i + 10} \right| = 2$$

B.1. Βρείτε τις γραμμές πάνω στις οποίες κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών z, w .

Μονάδες 5

B.2. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w| = \alpha$

Μονάδες 4

B.3. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \ln x - \sqrt{\alpha - x} + 1$, όπου α η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

i. Βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι αντιστρέφεται

Μονάδες 4

ii. Βρείτε το σύνολο τιμών της $h(x)$ και δείξτε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς 1 ρίζα.

Μονάδες 6

B.4. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} [2x^3 \cdot h^{-1}(x)]$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση $x^3 f''(x) + x + 2e = 0$ με $f'(e) = \frac{e+2}{e}$ και $f(e) = e$.

Γ.1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ **Μονάδες 3**

Γ.2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, ακρότατα και κοίλα **Μονάδες 2**

Γ.3. i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1} **Μονάδες 2**

ii. Να βρεθεί μονοτονία της f^{-1} **Μονάδες 2**

Γ.4. i. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ **Μονάδες 4**

ii. Αν f^{-1} συνεχής στο \mathbb{R} , να υπολογιστούν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$ **Μονάδες 3**

Γ.5. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{2e-1}{e-1}$ **Μονάδες 4**

Γ.6. i. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + x \ln x = e$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (1, e)$

ii. Να δείξετε ότι $\frac{2}{e} < \frac{e+x_0}{x_0^2} < 1+e$ **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

Η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,e)$ και: $f'(x) - \frac{f(x)}{x} = xe^x$, για κάθε $x \neq 0$.

Δ.1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$ **Μονάδες 6**

Δ.2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$. **Μονάδες 6**

Δ.3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^2) + f(x^5) = f(x^3) + f(x^6)$, $x \geq 1$. **Μονάδες 3**

Δ.4. Αν ισχύει: $\ln \beta - \ln \alpha < \alpha - \beta$ για κάθε $\alpha, \beta > 0$ να δείξετε ότι $\alpha > \beta$. **Μονάδες 3**

Δ.5. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $(\xi+1) \cdot e^{\xi-1} = 1$ **Μονάδες 3**

Δ.6. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x^2 (\ln x) \ln \left(\frac{f(x) - x}{x^2} \right) \right]$ **Μονάδες 4**

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΣΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΓΚΙΛΙΝΑ Ε. – ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΟΥ Γ.
– ΚΟΥΤΡΩΤΣΙΟΣ Δ. – ΡΟΥΣΣΟΥ Χ. – ΤΣΑΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ Κ.**