

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A. 1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

A. 2. Τι ορίζεται ως σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

A. 3. Να διατυπωθεί το θεώρημα Rolle και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία.

A. 4. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις με Σωστό – Λάθος :

1. Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.
2. Αν μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και f δεν αντιστρέφεται τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .
3. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .
4. Ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + x\eta\mu \frac{1}{x} \right) = 1$$

Αν η f συνεχής στο x_0 , τότε μπορεί η ευθεία $x = x_0$ να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ και ισχύει :

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot f(x) \text{ για κάθε } x > -1, f(0) = 1.$$

B. 1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$, $x > -1$

B. 2. Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

B. 3. Να δείξετε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει : $0 < f(x) < e$

B. 4. Έστω η συνάρτηση $g(x) = x + 1 - f(x)$. Να δείξετε ότι η ευθεία

$\varepsilon: y = x - e + 1$ είναι ασύμπτωτη της Cg

B. 5. Να δείξετε ότι $g''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} \cdot f(x)$

B. 6. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g'(x) = 0$

B. 7. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (-2,0) \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(-1) = 0$ και $f(2) = \ln 2$ τέτοια ώστε να ισχύει :

$$(x^3 + 2x^2)f'(x) + (x + 2) \cdot \ln(x + 2) = x$$

Γ. 1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x}$, $x \in (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

Γ. 2. Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της f .

Γ. 3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Γ. 4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x + 2)^{\frac{1}{x}} = e^{2016}$ έχει 2 ακριβώς ετερόσημες ρίζες.

Γ. 5. Αν x_2 η θετική ρίζα του προηγούμενου ερωτήματος και $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε να ισχύει :

$$f(x) + (x - x_2) \cdot g(x) \cdot e^{-x} \geq 2016.$$

Να δείξετε ότι $g(x_2) > 0$.

Γ. 6. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 2$ ισχύει $\frac{x}{x+2} < xf(x) - f(2) < \frac{x}{2}$.

Γ. 7. Να δείξετε ότι $2018^{2015} < 2017^{2016}$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΣΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΚΟΥΤΖΙΑΜΠΑΣΟΠΟΥΛΟΣ Ν.- ΡΟΥΣΣΟΥ Χ. –

ΤΣΑΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ Κ.