

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι **συνεχής**. Να αποδείξετε ότι αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

**Μονάδες 8**

**Β.** Αν  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $a$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε η συνάρτηση  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ,  $x \in \Delta$ ,

είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ . Δηλαδή ισχύει:  $F'(x) = f(x)$ , για κάθε  $x \in \Delta$ .

Να εξηγήσετε πως προκύπτει **εποπτικά** το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος.

**Μονάδες 7**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας ή στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Για κάθε μιγαδικό  $z$  ισχύει:  $z \cdot \bar{z} \geq 0$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = -x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $x'Oy$  και  $x'Oy'$ .

**Μονάδες 2**

**γ.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παρουσιάζει ακρότατο στο  $x_0 \in \Delta$ , τότε ισχύει  $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 2**

**δ.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

**Μονάδες 2**

**ε.** Οι πολωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι μιγαδικοί  $z, w$  για τους οποίους ισχύει:  $|z + \bar{w}| \geq |\bar{z} - w|$  (1)

**α)** Να δείξετε ότι:  $zw + \bar{z}\bar{w} \geq 0$

**Μονάδες 8**

β) Αν  $u = z \cdot w$  βρείτε το σύνολο σημείων του μιγαδικού επιπέδου όπου κινούνται οι εικόνες του  $u$ . **Μονάδες 7**

γ) Αν επιπλέον μια συνάρτηση  $f$  που είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και για την οποία ισχύουν  $f(0) = 0$  και  $f'(0) \neq 0$  και  $z = (f(x)+1) + i$  και  $w = 1 + \alpha^{f(x)}i$ ,  $\alpha > 0$  δυο μιγαδικοί που ικανοποιούν την σχέση (1), να δείξετε ότι  $\alpha = e$ . **Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$

α) Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της  $f$  **Μονάδες 6**

β) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $0 < f(x) < 4$ . **Μονάδες 6**

γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(\ln 7, 2)$  διαπερνά την γραφική παράσταση της  $f$ . **Μονάδες 6**

δ) Να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της  $f$  και να υπολογίσετε το εμβαδό που περικλείεται από την  $C_f$  τους άξονες  $x'x$ ,  $y'y$  και την ευθεία  $x = \ln 7$ . **Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1}$ .

α) Αν  $g$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $g'(x) = \frac{1}{e^x + 1}$  και  $g(0) = -\ln 2$  να δείξετε ότι  $f(x) = g(x)$

**Μονάδες 7**

β) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι κοίλη στο  $\mathbb{R}$  **Μονάδες 3**

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $\varphi(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε

ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $\frac{1}{e^{x+1} + 1} < \varphi'(x) < \frac{1}{e^x + 1}$  **Μονάδες 8**

δ) Να λύσετε την εξίσωση:  $\int_{x^2}^{x^2+1} f(t) dt + \int_{x+1}^x f(t) dt = 0$  **Μονάδες 7**

### ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΣΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ Α.- ΚΟΥΤΡΩΤΣΙΟΣ Δ.- ΘΕΟΔΩΡΙΔΟΥ Ε.-  
ΡΟΥΣΣΟΥ Χ.- ΓΚΙΛΙΝΑ Ε.- ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΟΥ Γ.-  
ΤΣΑΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ Κ.