ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και f΄(x)=0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο διάστημα Δ.

Α2. Έστω οι συναρτήσεις f,g συνεχείς σε ένα διάστημα Δ για τις οποίες ισχύει: $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει: f(x)=g(x)+c για κάθε $x \in Δ$.

Α.3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Α.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της Α (x_0 ,$f(x_0)$) δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f.
β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)>0$, τότε f(x)>0 για τις τιμές του x κοντά στο x_0.
γ. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y = f(x), όταν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.
δ. Η εικόνα f(Δ) ενός ανοιχτού διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι πάντα ανοιχτό διάστημα.
ε. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α,β] στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ell nx + 2x - 3$, $\quad x > 0$

1. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
2. Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \mathcal{E} (1, \mathrm{e})$ τέτοιο ώστε : $2x_0 = 3 - \ell n x_0$
3. Βρείτε το σύνολο τιμών της f και υπολογίστε το πλήθος των ριζών της.
4. Αν $z = x + yi$ είναι μιγαδικός με $x, y \mathcal{E} \mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(|z + 2i| - 1) = -1 \quad (1)$ βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z.
5. Αν w_1, w_2 δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν την σχέση (1), βρείτε την μέγιστη τιμή α του $|w_1 - w_2|$
6. Υπολογίστε το $\lim_{x \to 0^+} (f(x) + 2\alpha)$

ΘΕΜΑ 3$^{\text{ο}}$

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,3] \to \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \mathcal{E} [0,3]$.
Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = f(0) + i^{2013} f(2)$

$$w = -f(3) i^{2014} + \frac{f(1)}{2}(1+i)^2$$

Αν ο αριθμός $z\overline{w}$ είναι πραγματικός να αποδείξετε ότι :

1. $f(0) \cdot f(1) = f(2) \cdot f(3)$
2. Υπάρχει $x_0 \mathcal{E} [0,1]$ τέτοιο ώστε $f^2(x_0) = f(0) \cdot f(1)$
3. Η συνάρτηση f δεν είναι 1 – 1
4. Υπάρχει $\xi \mathcal{E} [0,3]$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$
5. Υπάρχει $x_2 \mathcal{E} [0,3]$ τέτοιο ώστε $14 f(x_2) = 4f\left(\frac{2011}{2012}\right) + 3f\left(\frac{2012}{2013}\right) + 7f\left(\frac{2013}{2014}\right)$

ΘΕΜΑ 4$^{\text{ο}}$

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} e^x - x + \ln(x^2+1) & x \leq 1 \\ (x-1)^2 + e + \ln\frac{2}{e} & x > 1 \end{cases}$

1. Να δείξετε ότι $g(x) \geq 1$ για κάθε $x \mathcal{E} \mathbb{R}$ και να βρεθεί το πλήθος ριζών της εξίσωσης $g(x) = \kappa - 1$, για κάθε πραγματικό αριθμό κ.

2. Να λυθεί η εξίσωση $g(x) = \ln x - e^{-x}$, $x \mathcal{E} (0,1]$

3. Αν $0 < \alpha < \beta < 1$ να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \mathcal{E} (\alpha, \beta)$:
$$g(\xi) = \frac{g(\alpha) + g(\beta) + g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$$

4. Να δείξετε ότι η g΄(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1] και να λυθεί η ανίσωση $g\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2} g(x) \leq g\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} g(x^2)$ $x \mathcal{E} (0,1]$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΣΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΚΟΥΤΖΙΑΜΠΑΣΟΠΟΥΛΟΣ Ν. – ΚΟΥΤΡΩΤΣΙΟΣ Δ. –ΡΟΥΣΣΟΥ Χ. – ΤΣΑΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ Κ.