# <u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ</u>

## ΘΕΜΑ Α

**Α.1** Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

***Μονάδες 8***

**Α.2** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Να δικαιολογήσετε ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι λάθος:

1) Η g είναι συνεχής στο 2.
2) Η f είναι συνεχής στο 1.
3) Η g έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής .
4) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$

***Μονάδες 7***

**Α.3** Να χαρακτηρίσετε ως Σωστές ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις.

1) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \Re$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \mu \in \Re$ και $f(x) > g(x)$ κοντά στο $x_0$ τότε λ≥μ.
2) Το όριο $\lim_{x \to 0} \left[\ln\left(x^3 + x - 1\right)\right]$ είναι καλώς ορισμένο.
3) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της, τότε είναι παραγωγίσιμη στο α.
4) Αν α> 0 , $x \in \Re$ τότε ισχύει $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
5) Αν $f(x) = \frac{1}{x}$, x ≠0 τότε $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$

***Μονάδες 10***

## ΘΕΜΑ Β

Για την συνεχή συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ ισχύει: $f^3(x) + x^2 f(x) = 2x \cdot f^2(x) + x^2 \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \Re$ , υπάρχει το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ και είναι πραγματικός αριθμός .

**α)** Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ και να βρείτε την f'(0). ***Μονάδες 6***

**β)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x'x σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (1, 2). ***Μονάδες 6***

**γ)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)+x\cdot\ln(\eta\mu x)-2x\cdot\ln x}{x}=L$

***Μονάδες 6***

**δ)** Αν f παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{e^{x-\alpha} f(x)-f(\alpha)}{x-a} = f(\alpha)+f'(a)$$

***Μονάδες 7***

## ΘΕΜΑ Γ

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\Re$.Για κάθε $x\in\Re^*$ ισχύει : $x\cdot f(x)=\sigma\upsilon\nu 2x-1$

**α)** Να βρείτε το f(0) και τον τύπο της f.

**β)** Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=-\dfrac{1}{2}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα

$(0,\dfrac{\pi}{2})$.

**γ)** Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

**δ)** Έστω θ μια οποιαδήποτε ρίζα θετική ( θ >0) της f. Να βρείτε το όριο:

$\lim\limits_{x\to\theta} f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

**ε)** Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της f.

***Μονάδες (5 x 5 =25)***

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ με $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

**α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα . ***Μονάδες 2***

**β)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. ***Μονάδες 3***

**γ)** Να δείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα. ***Μονάδες 2***

**δ)** Αν $g(x)=e^x$ και $h(x)=\sqrt{x}$ να δείξετε ότι η εξίσωση $g'(x)=h'(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα. ***Μονάδες 2***

**ε)** Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{f(2019)\cdot x^3+x}{x^2+1}\right)=L$

***Μονάδες 4***

**στ)** Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας $x_0\in(1,3)$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$f(x_0)=\dfrac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6}$

***Μονάδες 4***

**ζ)** Να βρείτε το όριο : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot f(x)+x^2}{x+1}$ ***Μονάδες 4***

**η)** Να λυθεί η ανίσωση: $f(x^4+2)\le f(x^2+2)$ ***Μονάδες 4***

***Επιμέλεια:***

***Στογιαννόπουλος Αντώνης – Κουτζιαμπασόπουλος Νίκος***