ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω Α ένα υποσύνολο του R και μία συνάρτηση f:A→R, με πεδίο ορισμού το Α.

Πότε η f λέγεται συνάρτηση 1-1; **Μονάδες 3**

Α2. **i)** Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$.

Μονάδες 5

ii) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι: Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Για κάθε z_1 , z_2 μιγαδικούς ισχύει $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ αν και μόνο αν οι διανυσματικές τους ακτίνες είναι ομόρροπα διανύσματα.

β. Αν μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη , παρουσιάζει ακρότατο σε εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν παρουσιάζει καμπή στο ίδιο σημείο.

γ. Μπορεί κάποια συνάρτηση να έχει οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ ή να έχει οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και ισχύει f(α)f(β) > 0 , τότε η εξίσωση f(x) = 0 , δεν έχει ρίζα στο διάστημα (α,β).

ε. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$, α,β $\in \Re$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= (x-1)e^{-x} + (x-3)e^{x}$, $x \in \Re$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x στις οποίες η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής στο Α(ξ,f(ξ)) όπου $\xi \in (0,2)$

γ) Να δείξετε ότι $\xi \in (1,2)$.

δ)Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $h(x) = f(x) + f''(x)$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x= 0 και x=2 .

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: f(x)= $\sqrt{3-x}$ - e^{2x} – 1+e^4

i) Να δείξετε ότι: $-e^6+e^4-1 \le f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [2,3]$

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να βρεθεί το $\lambda \in \Re$ ώστε να έχει πάντα λύση η εξίσωση f(x) = 2λ–1 +e^4.

iii) Να δείξετε ότι $\dfrac{1}{\sqrt{3-\alpha}} - \dfrac{1}{\sqrt{3-\beta}} < 4\left[(e^{\beta})^2 - (e^{\alpha})^2\right]$, α < β < 3.

iv) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_{1,}\xi_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = e^6 + e^2 - \sqrt{2}\,.$$

v) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=2 και x=3.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις F(x)= $\int_1^x f(t)dt$ και f(x)= $\dfrac{\ln x}{1+x^2}$, x>0 .

α) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_1^{x^2+1} f(t)dt + \int_{2x^2\ln x}^{1} f(t)dt = 0$ (1) έχει ακριβώς μια λύση x_0 στο διάστημα $(\frac{5}{3},+\infty)$. (Δίνεται: $\ln\frac{5}{3} \approx \frac{1}{2}$).

γ) Να δείξετε ότι η φ(x)= $\int_1^x \dfrac{\ln t}{(1+t)^2}dt$, x>1 είναι ίση με $\varphi(x) = -\dfrac{\ln x}{1+x}$ + lnx - ln(x+1)+ ln2, για κάθε x>1.

δ) i) Να δείξετε ότι F(x) > φ (x) για κάθε x>1 .

ii) και αν η F έχει όριο όταν $x \to +\infty$ να δείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty} F(x) \ge \ln 2$.

ε) i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση T(x) = F(x) – F $(\frac{1}{x})$, x>0 είναι σταθερή .

ii) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to 0+} F(x) \ge \ln 2$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:ΣΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ Α.,ΓΚΙΛΙΝΑ Ε.,ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΟΥ Γ., ΘΕΟΔΩΡΙΔΟΥ Ε.,ΚΟΥΤΡΩΤΣΙΟΣ Δ.,ΡΟΥΣΣΟΥ Χ., ΤΣΑΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ Κ.