

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ 2012**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $A$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  και μία συνάρτηση  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ , με πεδίο ορισμού το  $A$ .

Πότε η  $f$  λέγεται συνάρτηση 1-1;

**Μονάδες 3**

**A2. i)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f+g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ .

**Μονάδες 5**

**ii)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι: Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με **Σωστό** ή **Λάθος**.

**α.** Για κάθε  $z_1, z_2$  μιγαδικούς ισχύει  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$  αν και μόνο αν οι διανυσματικές τους ακτίνες είναι ομόρροπα διανύσματα.

**β.** Αν μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη, παρουσιάζει ακρότατο σε εσωτερικό σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε δεν παρουσιάζει καμπή στο ίδιο σημείο.

**γ.** Μπορεί κάποια συνάρτηση να έχει οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη στο  $-\infty$  ή να έχει οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ .

**δ.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, \beta]$  και ισχύει  $f(a)f(\beta) > 0$ , τότε η εξίσωση  $f(x) = 0$ , δεν έχει ρίζα στο διάστημα  $(a, \beta)$ .

**ε.** Αν  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε  $\int_a^\beta f(x) dx \geq 0$ ,  $a, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x-1)e^{-x} + (x-3)e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να βρείτε τις τιμές του  $x$  στις οποίες η  $f$  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

**β)** Να δείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής στο  $A(\xi, f(\xi))$  όπου  $\xi \in (0, 2)$

**γ)** Να δείξετε ότι  $\xi \in (1, 2)$ .

**δ)** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $h(x) = f(x) + f''(x)$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=0$  και  $x=2$ .

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \sqrt{3-x} - e^{2x} - 1 + e^4$

i) Να δείξετε ότι:  $-e^6 + e^4 - 1 \leq f(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [2,3]$

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και να βρεθεί το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε να έχει πάντα λύση η εξίσωση  $f(x) = 2\lambda - 1 + e^4$ .

iii) Να δείξετε ότι  $\frac{1}{\sqrt{3-\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{3-\beta}} < 4[(e^\beta)^2 - (e^\alpha)^2]$ ,  $\alpha < \beta < 3$ .

iv) Να δείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$  τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = e^6 + e^2 - \sqrt{2}.$$

v) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x$  και τις ευθείες  $x=2$  και  $x=3$ .

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$  και  $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ ,  $x > 0$ .

α) Να μελετήσετε την  $F$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\int_1^{x^2+1} f(t) dt + \int_{2x^2 \ln x}^1 f(t) dt = 0$  (1) έχει ακριβώς μια λύση  $x_0$  στο

διάστημα  $(\frac{5}{3}, +\infty)$ . (Δίνεται:  $\ln \frac{5}{3} \approx \frac{1}{2}$ ).

γ) Να δείξετε ότι η  $\varphi(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$ ,  $x > 1$  είναι ίση με  $\varphi(x) = -\frac{\ln x}{1+x} + \ln x - \ln(x+1) + \ln 2$ ,

για κάθε  $x > 1$ .

δ) i) Να δείξετε ότι  $F(x) > \varphi(x)$  για κάθε  $x > 1$ .

ii) και αν η  $F$  έχει όριο όταν  $x \rightarrow +\infty$  να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \geq \ln 2$ .

ε) i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $T(x) = F(x) - F(\frac{1}{x})$ ,  $x > 0$  είναι σταθερή.

ii) Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \geq \ln 2$ .

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ**

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΣΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ Α., ΓΚΙΛΙΝΑ Ε., ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΟΥ Γ.,  
ΘΕΟΔΩΡΙΔΟΥ Ε., ΚΟΥΤΡΩΤΣΙΟΣ Δ., ΡΟΥΣΣΟΥ Χ., ΤΣΑΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ Κ.**