ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α. 1 Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας , τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$.
(9 μον)

Α. 2 Να διατυπωθεί το θεώρημα Bolzano και να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία του.
(3 μον)

Α. 3 Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις με Σωστό η Λάθος :

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z είναι : $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$

β) Ισχύει πάντα $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=+\infty$

γ) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f:A\to R$ και $g:B\to R$, αν ορίζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g}$, τότε έχει πεδίο ορισμού την $\mathrm{A}\bigcap\mathrm{B}$.

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , τότε δεν είναι παραγωγισιμη στο x_0 .

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$. (10 μον)

Α. 4 Ποτέ λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγισιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της . (3 μον)

ΘΕΜΑ Β

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν οι σχέσεις :

- $|iz+3|=|2\bar{z}-3i|$ (1)
- $\omega=6+z$ (2)

Β. 1 Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των μιγαδικών z, w (6 μον)

Β. 2 Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός τέτοιος ώστε z = w
(4 μον)

Β. 3 Να δείξετε ότι : $7\leq|z-6-5i|\leq 13$ και να βρείτε τους μιγαδικούς για τους οποίους ισχύουν οι ισότητες (8 μον)

Β. 4 Αν $z_1,\ z_2$ είναι δύο μιγαδικοί του γεωμετρικού τόπου της σχέσης (1), να αποδείξετε ότι :

α) $|z_1 - z_2| \le 6$ (2 μον)

β) Αν $|z_1 - z_2| = 6$ τότε να αποδείξετε ότι :

i) $|z_1 + z_2| = 6$

ii) $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 36$ (5 μον)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)-xe^x} = 2$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-2h)}{h} = -10x_0e^{f(x_0)}$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε :

Γ. 1 Να δείξετε ότι $f(0) = 0$. (5 μον)

Γ. 2 Να δείξετε ότι $f\ '(x_0) = -2x_0 \cdot e^{f(x_0)}$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ (7 μον)

Γ. 3 Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(x) = -\ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$
(8 μον)

Γ. 4 Να αποδείξετε ότι : $|f(x) - f(y)| \le |x - y|,\ \textit{για κα'θε}\ x,\ y\ \in \mathcal{R}$
(5 μον)

Γ. 5 Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2\ \in (-1,\ 1)$ με $\xi_1,\ \xi_2\ \neq 0\ \ \textit{ώστε}\ \frac{\xi_1}{\xi_1^2+1} + \frac{\xi_2}{\xi_2^2+1} = 0$

Γ. 6. α. Να δείξετε ότι $-1 \le f\ '(x) \le 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x^2+1)^2 + x = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

Γ. 7 Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,\ x_2\ \in (-1,\ 1)$ τέτοιο ώστε $(f'(x_1))^2 + (f'(x_2))^2 = 1$

Γ. 8 Αν $f\ '\ (\kappa) + f\ '(\lambda) = 2$ να δείξετε ότι $\kappa = \lambda = -1$

Γ. 9 Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x\to+\infty} f'(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x$

Γ. 10 α. Να δείξετε ότι η $h(x) = \int_0^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{1+t^2}dt - x$ είναι σταθερή συνάρτηση στο $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$

β. Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1\left(f(x)\cdot\int_0^x f(t)dt\right)dx$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΣΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΚΟΥΤΖΙΑΜΠΑΣΟΠΟΥΛΟΣ Ν. – ΚΟΥΤΡΩΤΣΙΟΣ Δ. – ΡΟΥΣΣΟΥ Χ. – ΤΣΑΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ Κ.