ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Α.2 Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- f(α) ≠ f(β)

δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = η$.

Α.3 Πότε η ευθεία y = β λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο +∞;

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

1. Αν f συνεχής στο [α,β] με f(x)≥0 και ισχύει $\int_α^β f(x)dx > 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in [α,β]$ τέτοιος ώστε $f(x_0)>0$.
2. Αν η συνεχής συνάρτηση f δεν είναι παντού ίση μηδέν στο [α,β] και ισχύει $\int_α^β f(x)dx = 0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές.
3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
   Αν $f'(x) > 0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x) <0$ στο $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

4. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α,β] και σημείο $x_0 \in [α,β]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι: $f'(x_0)=0$.
5. Αν $\int_α^β f(x)dx=0$ και α<β τότε κατ' ανάγκη ισχύει f(x)=0 για κάθε $x \in [α,β]$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις

- $\bar{z} + 6i = \frac{1}{z-6i}$ $\quad με\ z \neq 6i$
- $\omega - 5\alpha = i(1 - \alpha\omega), \quad \alpha \mathcal{E} \mathbb{R}$

Και η συνάρτηση $f(x) = x^2 - |z - \omega|x, \ \ x\mathcal{E}\mathbb{R}$ όπου $|z - \omega|$ η απόσταση των εικόνων των z, ω.

Β. 1 . Να βρεθούν οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων των μιγαδικών z, ω.

Β. 2. Αν ω φανταστικός, να δείξετε ότι $\omega^{2014} = -1$.

Β. 3. Να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή μέτρου $|z - \omega|$.

Β. 4. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία y = 2 σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \mathcal{E}(-1, 1)$.

Β. 5. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f του x΄x και τις ευθείες x = -1 και x = 1 ισούται με $|z - \omega|$.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

i) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \cdot \int_0^1 t \cdot f^2(xt)dt,$ $x \in \mathbb{R}$

Έστω ακόμη η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2,$ $x \in \mathbb{R}$

Γ. 1. α) Να δείξετε ότι : $f'(x) = -2xf^2(x)$

β) Να δείξετε ότι η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

Γ. 2. α) Βρείτε τον τύπο της $f(x)$ και δείξτε ότι είναι ο $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

β) Εξετάστε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και βρείτε το σύνολο τιμών.

Γ. 3. α) Να λύσετε την εξίσωση $\ell n\sqrt{\frac{1}{\eta\mu^2\chi+1} + 2} = \ell n\sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x+1} + 2}$ $\gamma\iota\alpha\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

β) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to+\infty}(xf(x)\eta\mu 2x)$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f :(0,+∞) με f(x)=$-\int_1^x \frac{f(t)}{2t\sqrt{t}}dt + e$ (1) και f(x)≠0 , για κάθε x>0.

Δ.1. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0,+∞) και να βρείτε το πρόσημό της.

Δ.2. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

Δ.3. Αν $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, x>0 , να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f.

Κατόπιν να αποδείξετε ότι: $\int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x}dx + \int_1^{1/4} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}dx = \frac{e^2}{4} - e$

Δ.4. i) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α(1,f(1)) και να δείξετε ότι $\int_1^2 f(t)dt \geq \frac{3e}{4}$.

Δ.5. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{xf(x^2)}$.

Δ.6. Να δείξετε ότι για κάθε x$\in$[1/4 , 1] ισχύει: $f(x) \leq e^2 - \frac{e}{2}(x - \frac{1}{4})$ (προαιρετικό)

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΣΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΚΟΥΤΖΙΑΜΠΑΣΟΠΟΥΛΟΣ Ν. – ΚΟΥΤΡΩΤΣΙΟΣ Δ. –ΡΟΥΣΣΟΥ Χ. – ΤΣΑΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ Κ.