<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α.1. Έστω f μία συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Α.2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$ με $\alpha \in \Re$ και x>0. Να αποδείξετε ότι : $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Α.3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Α.4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

2. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$, τότε υπάρχει το όριο της f(x) στο x_0 και είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

3. Αν για κάθε στοιχείο ψ του συνόλου τιμών της f(x), η εξίσωση f(χ)=ψ έχει λύση ως προς x τότε η f είναι ''1-1''

4. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β], τότε θα είναι συνεχής στο α και στο β.

5. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $z_1^2 + z_2^2 = 0$, τότε ισχύει πάντοτε $z_1 = z_2 = 0$

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Εστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει : $|iw + 1 - 2i| = |2z - 2i| = 4$ (1)

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M(z), N(w)

β. Να δείξετε ότι $1 \le |z| \le 3$

γ. Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί z, w ώστε z = w

δ. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$

ε. Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου z τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 και επιπλέον ισχύει ότι $z_1 + z_2 + z_3 = \frac{3}{2}i$ να δείξετε ότι $|z_1 + z_2 + z_3 - 3i| = \frac{1}{2}|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R και η συνάρτηση g με τύπο
$g(x) = \int_0^x xf(t) \cdot dt + \int_x^{2x} f(t-x)dt$

α. Να δείξετε ότι $g(x) = (x+1)\int_0^x f(t)dt$

β. Να δείξετε ότι g παραγωγίσιμη στο R και να βρεθεί η $g'(x)$

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε να ισχύει
$(x_0+1)f(x_0) = \int_{x_0}^0 f(t)dt$

δ. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει
$2\int_0^1 f(t)dt - (x_1+1)f(x_1) = \int_0^{x_1} f(t)dt$

ε. Αν $2f(x) + (x+1)f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$ να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\Re$

στ. Αν $f(x) = x \cdot \ln(x^2+1)$ για κάθε $x \in [2, 3]$ να υπολογίσετετο εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες x = 2 και x = 3.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{x^2+1}$

α. Να βρεθεί σύνολο τιμών της f και να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 \in \Re$ για το οποίο ισχύει $f(x_0) = 2013$

β. Να βρεθεί εμβαδόν χωρίου Ε που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία x = -1

γ. Να δείξετε ότι $E = \int_0^1 |f(x)| dx$

δ. Να μελετήσετε την f ως προς κυρτότητα και σημεία καμπής

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο Α(1, f(1)) και τον y΄y για $x \geq 0$

στ. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει η σχέση $|z + 2013 \cdot f(0) - i| = |i\bar{z} + 1|$ να δείξετε ότι $z \in \Re$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΣΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΓΚΙΛΙΝΑ Ε. – ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΟΥ Γ. – ΚΟΥΤΡΩΤΣΙΟΣ Δ. – ΡΟΥΣΣΟΥ Χ. – ΤΣΑΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ Κ.