ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο 20-04-16

Α. 1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Είναι παράγουσες της f στο Δ και

- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Α. 2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat.

Α. 3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό ή Λάθος:

1. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα.
2. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.
3. Αν τα όρια των f, g στο x_0 είναι αντίστοιχα l, m με $l, m \in \mathbb{R}$ και f(x)<g(x) τότε $l \leq m$.
4. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ με $a > 0$τότε ισχύει : $(\alpha^x)' = x \cdot \alpha^{x-1}$
5. Αν f, g συνεχείς στο x_0 τότε πάντα fog συνεχής στο x_0.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $F(x)$ μια αρχική της $f(x)$ στο $(0, +\infty)$ αν για κάθε $x > 0$ ισχύουν :

$$xf(x) + F(x) = 6x - \frac{3x^2}{2} - 4xlnx$$

$$g''(x) = \frac{f(x)}{x^2}$$

$$F(1) = \frac{7}{2}$$

Α. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$

Β. i. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$ στο οποίο η $g(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής

ii. Να δείξετε ότι $x_0 \in (1,2)$

Γ. Αν επιπλέον ισχύουν $g'(1) = -1,\ g(1) = 0$

i. Να δείξετε ότι $g(x) = ln^2x - xlnx$

Δ. Για κάθε $x > 0$ να δείξετε ότι

$(e-1)[f(e^x) - f(x)] + e^{-x}(e^x - x)f(e^x) < e^{-x}(e^x - x)f(e^{x+1})$

Ε. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της που έχει συντελεστή διεύθυνσης $-1 - \frac{2}{e}$ και να δείξετε ότι $ef(x) - 2e \geq -e \cdot x - 2x$ για κάθε $x > 0$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f \to \mathbb{R} - \mathbb{R}$ με $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0 \quad (1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0,\ f'(0) = -e$

Β. 1. Να βρείτε τον τύπο της f(x)
Β. 2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα αν $f(x) = -x \cdot e^{2x+1}, \quad x \in \mathbb{R}$
Β. 3. Να βρείτε τα όρια της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$ και τις οριζόντιες ασύμπτωτες.
Β. 4. Να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση αφού πρώτα μελετήσετε την κυρτότητα της f κατόπιν για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $x \cdot e^{2x+1} + \alpha = 0$.

Β. 5. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης (ε) στο 0(0, 0) και να υπολογίσετε το εμβαδό που περικλείεται από $C_f, \varepsilon, x = -\frac{1}{2}$.
Β. 6. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f\left(\frac{\pi}{4} - \xi\right) = f'\left(\frac{\pi}{4} - \xi\right) \cdot \varepsilon\varphi\xi.$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και f κυρτή στο $[0, +\infty)$. Για την συνάρτηση f ισχύουν οι σχέσεις:
i) $e \cdot \int_0^1 \frac{f''(x) - f(x)}{e^x} dx = f'(1) + f(1) - e$
ii) C_f διέρχεται από το Α (0,1)
iii) $f'(x) > 2f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Α. Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$
Β. Να δείξετε ότι $f(x) > 1$ για $x \in (0, +\infty)$
Γ) Να βρεθεί σύνολο τιμών της f και πλήθος ριζών της εξίσωσης $e^{f(x)} = 2016$
Δ) Αν, επιπλέον ισχύει ότι $f(1) = 2$
i) Να δείξετε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα τέτοια ώστε $2f(x) = 3$
ii) Να δείξετε ότι $1 < \int_0^1 f(x)dx < \frac{3}{2}$
iv) Να δείξετε ότι f αντιστρέφεται και ότι ισχύει$\frac{1}{2} < \int_1^2 f^{-1}(x)dx < 1$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΣΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΚΟΥΤΖΙΑΜΠΑΣΟΠΟΥΛΟΣ Ν.- ΡΟΥΣΣΟΥ Χ. – ΤΣΑΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ Κ.