Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ΄ λυκείου

$1^η$ δημοσίευση 24–2–2010

Α. Όταν θέλουμε να λύσουμε μια άσκηση συνήθως λέμε : Πώς θα την λύσω; Ποια μέθοδο θα εφαρμόσω;

Στην προσπάθεια μας να απαντήσουμε, καλό είναι να μην αποκλείσουμε την μέθοδο της « **απαγωγής σε άτοπο** ».

Να υποθέσουμε δηλαδή ότι δεν ισχύει αυτό που μας ζητείται, όπως : Αν μας ζητούν να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $f(x_o)>0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο x_o, οπότε θα ισχύει $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in A$. Με βάση αυτή μας την υπόθεση και υλοποιώντας τα δεδομένα μας, προσπαθούμε να φθάσουμε σε άτοπο (σε κάτι που αντίκειται στις υποθέσεις ή σε γνωστές ιδιότητες)

Εφαρμογή Α:

Έστω $A \subseteq R$ και οι συναρτήσεις $f,g:A \to R$ παραγωγίσιμες, τέτοιες ώστε : $f'(x)g(x)-f(x)g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της f υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της g.

Β) Σε ασκήσεις που αναφέρονται στην αντίστροφη μιας συνάρτησης, σκεπτόμενοι και ενεργούντες απλά, μπορεί να φθάσουμε ευκολότερα και συντομότερα στο ζητούμενο.

Αν π.χ. εφαρμόσουμε ορισμό ή θεώρημα και γνωστή ιδιότητα ($g^{-1}(g(x))=x,\ x \in A,\quad g(g^{-1}(y)=y,\ y \in g(A)$)

Εφαρμογή Β:

Έστω η συνάρτηση f η οποία έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\Re$ και με την ιδιότητα: $[f(x)]^7+2005f(x)+2010x=0$ (1). Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

Γ) Μερικές φορές, σε « έξυπνες » ασκήσεις, χρειάζεται λεπτομερής ανάλυση των δεδομένων. Δουλεύουμε και λίγο με τη διαίσθησή μας και όταν ανακαλύψουμε τι πρέπει να κάνουμε (χωρίς να είναι απόλυτο αυτό) προχωράμε τη λύση.

Παράδειγμα :

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,β), να δείξετε ότι, για $x\in(\alpha,\beta)$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}>\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \qquad (1)$$

(**Σκέψη :** αφού $x\in(\alpha,\beta)$ είναι $x\neq\alpha$, $x\neq\beta$, $\alpha\neq\beta$ οπότε οι παρονομαστές δεν μηδενίζονται στο (α,β) επομένως μπορώ να κάνω απαλοιφή παρονομαστών στην (1) και να εργαστώ στη νέα σχέση που θα προκύψει στο [α,β], χρησιμοποιώντας οπωσδήποτε την μονοτονία της f΄).

Να συνεχίσετε τη λύση.

Εφαρμογή Γ:

Αν για την συνάρτηση f ισχύει το Θ.Rolle στο [α,β] και η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β), να δείξετε ότι : f(x)-f(α)<0 στο (α,β).

Δ) Μην ξεχνάμε ότι για να βρούμε την παράγωγο συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της αν δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε κανόνες παραγώγισης, καταφεύγουμε στον **ορισμό της παραγώγου σε σημείο**. Στην περίπτωση αυτή θα χρειαστεί ίσως, εμείς να δημιουργήσουμε τους λόγους μεταβολής, στηριζόμενοι στις σχέσεις που δίνονται, για να βρούμε τις παραγώγους που θέλουμε.

Εφαρμογή Δ:

Έστω ότι οι συναρτήσεις $f,g:A\to\Re$ είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $\alpha\in A$ και ότι γι’ αυτές ισχύουν οι σχέσεις:

(i) $f(\alpha)=g(\alpha)$ (1)

(ii) $f(x)+x-\alpha \le g(x)$, για κάθε $x \in A$. (2)

Να αποδείξετε ότι : $f'(\alpha)+1=g'(\alpha)$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ :

ΣΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ ΑΝΤΩΝΗΣ – ΘΕΟΔΩΡΙΔΟΥ ΕΛΕΝΗ – ΚΟΥΤΡΩΤΣΙΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ – ΟΥΖΟΥΝΗΣ ΧΡΗΣΤΟΣ – ΡΟΥΣΣΟΥ ΧΡΙΣΤΙΝΑ – ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ – ΓΚΙΛΙΝΑ ΕΥΑ – ΤΣΑΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΚΩΣΤΑΣ.

Οι λύσεις των θεμάτων θα βρίσκονται την επόμενη Τετάρτη στην ηλεκτρονική διεύθυνση: www.omilosfr.gr