

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A) α.** Να αποδείξετε ότι όταν μια συνάρτηση  $f(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  είναι και συνεχής στο  $x_0$
- β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x)=x^{-\nu}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει  $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$
- B)** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ?
- Γ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \kappa$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda$  με  $\kappa \neq \lambda$ ,  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .
- Δ)** Αν  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(1)+2f(2)+3f(3)=0$  να δείξετε ότι η  $f(x)$  δεν είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύουν οι σχέσεις :

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = -1$
- $(2x+1)f'(x) + x^2 f''(x) = 0$  για κάθε  $x > 0$

**α)** Να βρεθεί εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$

**β)** Να δείξετε ότι  $f(x) = e^{\frac{1}{x}-1} + 1$ ,  $x > 0$

**γ)** Να βρεθεί μονοτονία της  $f$  καθώς και το σύνολο τιμών της

**δ)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική θετική ρίζα τέτοια ώστε να ισχύει η εξίσωση  $e^{\frac{1}{x}} = 2014 \cdot e$

**ε)** Αν  $\alpha, \beta \in (1, 2)$  με  $\alpha < \beta$  να αποδείξετε ότι  $\frac{\sqrt{e}(\beta-\alpha)}{4} < e^{\frac{1}{\alpha}} - e^{\frac{1}{\beta}} < e(\beta - \alpha)$

### **ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Έστω μια συνεχής συνάρτηση  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  
 $f(1)=3$  και  $f^2(x) - 2xf(x) - 3 = 0$  για κάθε  $x \geq 1$ .

**A)** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 3}$  για κάθε  $x \geq 1$ .

**B)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της  $f^{-1}$ .

**Γ)** Αν  $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$  τότε να βρείτε τα όρια :

**α)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  **και**

**β)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xg(x) + \eta\mu f(x)}{3\sqrt{x} - 2x \operatorname{csc}\left(\frac{1}{x}\right)}$

### **ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς  $z$  για τους οποίους ισχύει :

$$|z - 2 - 3i|^2 + |\bar{z}i - 3 - 6i|^2 = 16 \quad (1).$$

**A)** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του  $z$  και την μέγιστη κ ελάχιστη τιμή του  $|z|$ .

**B)** Να βρείτε τον αριθμό  $|(4 - 3i)z - 25|$ .

**Γ)** Θεωρούμε έναν μιγαδικό  $z_0$  που ικανοποιεί την (1) και έστω  $w_1, w_2$  οι ρίζες της εξίσωσης:

$$w^2 + 2(|z_0| - 5)w + 9 = 0.$$

**α)** να δείξετε ότι οι  $w_1, w_2$  δεν είναι πραγματικοί αριθμοί.

**β)** να βρείτε τα μέτρα των  $w_1, w_2$ .

**γ)** να δείξετε ότι ο αριθμός  $u = \frac{w_1 - 3i}{w_1 + 3i}$  είναι φανταστικός.

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΣΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΚΟΥΤΖΙΑΜΠΑΣΟΠΟΥΛΟΣ Ν. – ΚΟΥΤΡΩΤΣΙΟΣ Δ. –  
ΡΟΥΣΣΟΥ Χ. – ΤΣΑΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΣ Κ.**